

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXV

No. 9

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: B. BROUWER

CONTENTS

- J. BOEKE and C. DIJKSTRA: "De- and Regeneration of sensible endcorpuscles in the duck's bill (corpuscles of GRANDRY and of HERBST) after the cutting of the nerve, the removing of the entire skin or the transplantation of the skin in another region". p. 1114. (With one Plate).
- JAN DE VRIES: "Involutionen auf der trinodalen biquadratischen Kurve", p. 1119.
- JAN DE VRIES: "Involutionen auf der nodalen Kubik", p. 1121.
- R. WEITZENBÖCK: "Ueber die Transversalen von vier Ebenen im R_5 ", p. 1123.
- A. A. NIJLAND: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen. X. T. Ursae Majoris", p. 1126. (With one Plate).
- F. A. H. SCHREINEMAKERS: "Osmotic systems. in which non-diffusing substances may occur also. II. Equilibrium and the change of the permeability of the membrane", p. 1131.
- J. BÖESEKEN and CH. SCHNEIDER: "The action of per-acetic acid and per-benzoic acid on the unsaturate aliphatic and on aromatic Iodine compounds", p. 1140.
- F. A. VENING MEINESZ: "The Gravity Expedition of Hr. Ms. O 13 in the Atlantic", p. 1143. (With one Map).
- W. A. J. M. VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT: "Some additional notes on the permo-carboniferous Orogeny in North America", p. 1149.
- PH. H. KUENEN: "Remarks on the undation-theory of VAN BEMMELEN". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 1155.
- TH. E. DE JONGE COHEN: "Rückbildung der Schneidezähne im Ober- und Unterkiefer". (Communicated by Prof. M. W. WOERDEMAN), p. 1161. (With three Plates).
- A. BIEMOND: "Ueber den Verlauf der okzipitalen Balkenfasern und eine neue Verbindung des Cingulums beim Java-Affen". (Communicated by Prof. B. BROUWER), p. 1166. (With two Plates).
- C. S. MEIJER: "Ueber die asymptotische Entwicklung von

$$\int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{yz} - w \sinh z \, dz \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} \right)$$
für grosse Werte von $|w|$ und $|y|$ ". (Erste Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1170.
- M. PINL: "Quasimetrik auf totalisotropen Flächen". (Erste Mitteilung). (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 1181.
- STEFAN BERGMANN: "Ueber die Nullstellen einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 1188.

Histology. — *De- and Regeneration of sensible endcorpuscles in the duck's bill (corpuscles of GRANDRY and of HERBST) after the cutting of the nerve, the removing of the entire skin or the transplantation of the skin in another region.* By J. BOEKE and C. DIJKSTRA.

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

In the connective-tissue layer of the skin of the bill of the duck there are found two sorts of sensitive endcorpuscles, viz. the corpuscles of GRANDRY and of HERBST. They are lying underneath the epithelium of the skin, and are distributed quite regularly throughout the smooth "wax" skin of the bill. By their regular distribution and their simple, well-defined structure they are very well adapted to an investigation of their de- and regeneration.

The chief features of the regeneration process after the cutting of the nerve were described in these proceedings (meeting of September 1922) by one of us, so we may refer the reader to that article for the general features of the regeneration process.

In the communication of to-day we are going to describe:

1. De- and regeneration of the corpuscles mentioned above after the cutting of the nerves, a: the nerves are cut only once and the regeneration is not disturbed any more; b: the nerves are cut and after a month are sectioned again, and again after two months. Then the regeneration is studied;
2. a piece of the entire skin is removed, and regeneration of the endcorpuscles is studied in the regenerated piece of skin;
3. a piece of the skin of the bill is removed and transplanted on the leg, and vice versa; regeneration is studied in both cases, after the lapse of several months (4 to 11 months).

Chief aim of the investigation was the answer to the question, whether regeneration only occurs in endcorpuscles, which remained more or less recognizable, or new endcorpuscles have to be formed, and whether in regeneration of the nerves inside a newly formed piece of skin or inside a transplanted piece of skin there occurs a formation of new endcorpuscles.

I. De- and Regeneration of sensible endcorpuscles after the cutting of the nerve.

In the skin of the bill small rectangular pieces of skin were circumcised, the knife being pressed to the bone, so that we may be sure that all the nerve fibers are cut. After a few days or weeks a slight degeneration of the sensitive corpuscles (both those of GRANDRY and of HERBST) is

visible; in the corpuscles of GRANDRY the tactile cells shrivel a little, in their protoplasma a degenerative granulation becomes apparent and the periterminal network disappears. The tactile disc becomes vacuolated, but even after several weeks the tactile disc remains visible, so that we may conclude in correspondence with the observations of one of us (BOEKE, 1927), that even in degeneration the tactile disc does not disappear but may be used again by the regenerating nerve fibers and reconstructed into a normal nervous disc, when regeneration sets in in time, before the whole corpuscle has disappeared.

Beside these alterations there was observed a slight thickening of the capsule by multiplication of the capsule cells.

In the corpuscles of HERBST only a slight alteration of the central core and a slight thickening of the capsule was noticed.

In order to see, whether these degenerative alterations become stronger, when degeneration lasts longer and regeneration does not set in speedily, in a number of animals the nerves were again sectioned after 4 weeks, and sometimes a third time after 8 weeks and 12 weeks, in these cases the remains of the tactile corpuscles remained without the slightest vestige of a reinnervation during four months. The preparations showed that in these circumcised pieces of skin not a single nerve fiber was to be found. Even in these pieces of skin many of the tactile cells were still visible, but of the tactile (nervous) disc in most cases not a trace remained visible. There where the nervous disc had been, between the tactile cells, an invasion of the capsule cells is found, which send their protoplasmic processes into the space between the tactile cells, occupied beforehand by the nervous disc. This brings us to the supposition, that after the original tactile disc has disappeared when regeneration did not set in, a new tactile disc is formed by and from the capsule cells; we must bear in mind, that probably the capsule cells are of lemmoblastic origin, and differentiated inside the strands of lemmoblastic cells, which according the investigations of HERINGA, build up the tactile corpuscles in the embryo.

After a second and third section of the sensory nerves and a lapse of 4 months the increase in bulk and in number of the capsule cells was more marked than after the first section.

Regeneration (after a single section of the nerves) sets in about four weeks after the operation, and 6—8 weeks after the section of the nerves the young regenerating nerve fibers reach their destination, the sensory corpuscles. The tactile cells regain their normal volume, the shrivelling disappears, the entire corpuscle returns to its normal aspect. The regenerating nerve fiber reaches the protoplasmic tactile disc and branches to form a new neurofibrillar structure. As it was described years ago (these Proceedings, Sept. 1922) by one of us, in connection with the branching and outgrowing neurofibrillar strands a new intraprotoplasmic network is formed inside the protoplasma of the tactile cells, this network first showing itself round the end-branches (end-reticulations and end-

knots) of the ingrowing nerve fibers and then it appears to extend gradually over the whole extent of the flat tactile cells.

In accordance with this description it could be stated, that besides a regeneration of the old existing sensory corpuscles a great number of new corpuscles is formed, especially GRANDRY's corpuscles, in which process sheathcells (lemmoblasts) grow larger and become tactile cells, as HERINGA (1920) has established as to embryological development (BOEKE, l.c.p. 320). From a study of a number of cases it followed, that in the preparations the number of newly formed corpuscles of GRANDRY is at least as great as that of the regenerated old corpuscles. It is the question however whether these newly formed corpuscles remain all of them; it is possible that a number of them disappear again after the regeneration-impuls ends, as is known for the exuberant motor innervation after regeneration. It was impossible to get a definite answer to this question from the preparations.

II. *Regeneration of the nerves and reappearance of sensory corpuscles after removal of the entire skin.*

In the same species used for the first experiments, the duck, small pieces of the skin of the bill (of the same size as in the first series) were circumcised and removed entirely, the connective tissue underneath the epithelium being taken away as thoroughly as possible, until the periost of the bone of the bill is exposed. The wound was covered with a solution of collodium. After a few weeks a new skin is formed, the epithelium and the connective subcutaneous tissue growing in from the borders of the wound, and after a time the newly formed piece of skin is only recognizable from its surroundings by its colour and in section by its structure. In all the cases studied the pieces of newly formed skin were to be distinguished with absolute certainty from the surrounding normal skin, the border lines of the scar could be traced easily in the sections. In the young newly formed tissues of the scar there was found an exuberant regeneration of the nerve fibers, which reached its culmination point 4 to 6 months after the removal of the skin. Not only was the regeneration of the nerve fibers throughout the whole extent of the scar, but there appeared new endorgans too, the first traces of which were found about $4\frac{1}{2}$ —5 months after the operation. Both corpuscles of GRANDRY and of HERBST are formed anew, but the corpuscles of HERBST in general appeared somewhat later than those of GRANDRY. Just as was the case in the first series of experiments, there are formed a number of endorgans, which disappear again after a few months; $7\frac{1}{2}$ —8 months after the removal of the piece of skin most of them have disappeared. Those which remain intact have developed further during those months, so that they appear now as normally built large corpuscles, which are not to be distinguished from the normal corpuscles in the surrounding skin. The number of regenerated nerve fibers too lessens after a time, just

J. BOEKE and C. DIJKSTRA: DE- AND REGENERATION OF SENSIBLE
ENDCORPUSCLES IN THE DUCK'S BILL (CORPUSCLES OF GRANDRY AND
OF HERBST) AFTER THE CUTTING OF THE NERVE, THE REMOVING OF THE
ENTIRE SKIN OR THE TRANSPLANTATION OF THE SKIN IN ANOTHER REGION



Fig. 1.



Fig. 2.

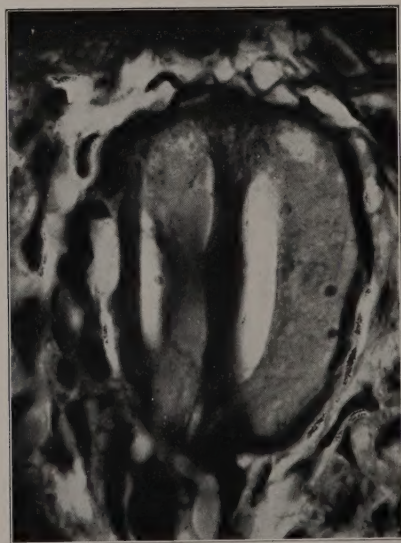


Fig. 3.

as could be stated for the motor nerve fibers in regeneration (BOEKE, 1916, 1921). This fact may be brought in connection with the physiological fact, that the sensibility of the scar tissue, which is generally very high during the first stages of regeneration, lessens after a time. This may be due not to a lessening sensibility of the regenerated endorgans, but to the smaller number of endorgans remaining after the first exuberant regeneration-processes.

In the newly formed connective tissue of the scar the formation of the new endorgans appeared to be in exactly the same way as during the embryological development of them, as it was described by SZYMONOWICZ and HERINGA.

III. *Degeneration of the sensory endorgans after transplantation of the skin and regeneration of them in the transplanted piece of skin.*

In 15 animals (ducks) small rectangular pieces (4 in number) of the skin of the bill were cut away; the same operation was performed on the legs and the pieces of the skin of the bill were transplanted on the leg and vice versa. When properly treated the pieces of skin healed perfectly, and after 11 days the dressing (gauze and collodium) could be taken away and the pieces remained intact and healthy. As is shown in the photographs (Fig. 1 and 2), the transplanted pieces of skin from the legs may be recognized very easily from those from the bill by their curious chequered rhombiform appearance (scales). When the transplanted pieces of skin heal properly, this pattern remains perfectly visible, even 11 months after the transplantation it was visible in the pieces of skin from the leg as well as in the normal leg. The pieces of skin from the bill transplanted on the leg (Fig. 2) remain as perfectly smooth as in their normal position. In microscopic sections the structure of the transplanted pieces showed itself to remain entirely as it was. The borderline of the implanted pieces was recognizable everywhere as a distinct line in the sections. The pieces were cut out and studied $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 3, 5, 6, 8 and 11 months after transplantation. Structure and aspect both of the epithelium and of the connective tissue of the transplanted pieces remained absolutely the same even after 11 months. The pieces of skin on the bill all healed perfectly, from the pieces of skin transplanted on the leg about one third of the total number of transplants did not heal well (the technical difficulties were here of course much greater than in the other series), but in 60 to 70 % of the operations performed the results were as described above. Because the borderlines of the transplanted pieces could be seen in the sections accurately, it was possible to distinguish in every case in the sections the endcorpuscles formed inside the transplanted piece from those in the scar and those in the surrounding normal skin; so it seems to us, that the study of the sections and the deductions drawn from that may be relied upon.

Microscopic investigation showed in the first place, that in the

transplanted pieces of skin the endcorpuscles, which were present before transplantation, degenerate entirely and disappear. Four weeks after transplantation both the corpuscles of GRANDRY and of HERBST have degenerated entirely. Of the corpuscles of GRANDRY only traces of the capsule cells are still recognizable; six weeks after the operation these vestiges too have entirely disappeared. The corpuscles of HERBST degenerate somewhat later, and 6—8 weeks after the transplantation their capsules are still visible, but in an altered condition. In the capsules we see a number of blood capillaries; apparently they are being organized by the surrounding connective tissue.

In the normal skin of the leg there are present only a few corpuscles of HERBST (they are very rare) and here and there tactile cells of MERKEL. Corpuscles of GRANDRY are not to be found in the skin of the legs. Both the corpuscles of HERBST and the MERKEL-cells degenerate and disappear entirely within four weeks after the transplantation. After 3—4 weeks not a trace of them is to be found. In this stage the transplanted piece of skin is entirely devoid of nerve fibers; the old nerve strands have entirely degenerated, and new nerve fibers have not developed yet. It is only $2\frac{1}{2}$ —3 months after the transplantation, that we find the first traces of regeneration of the nerve fibers. So a re-innervation of the old endcorpuscles is absolutely impossible. When there is found in the transplanted piece of skin a real endcorpuscle, we have to regard it as a newly-formed one.

As it was mentioned already, it is only after $2\frac{1}{2}$ —3 months, that we find regenerated nerve fibers in the transplanted pieces of skin. These regenerating nerve fibers, which could be found both in the connective tissue and in the epithelium, partly appear to have followed the course of the old degenerated nerve strands, partly to have followed new paths through the connective tissue, so that a new terminal system of nerve strands is built up in the transplanted skin.

It followed from the study of the microscopic sections (partly fixated in a solution of corrosive sublimate and HERMANN's solution aa, and coloured with iron-haematoxylin, partly fixated in neutral formol 12 % and impregnated after the method of BIELSCHOWSKY), that in the transplanted pieces of skin taken from the leg, even 11 months after the operation no traces of sensory corpuscles were to be found, even in perfectly re-innervated pieces full of nerve strands. In the pieces of skin from the bill transplanted on the leg a number of newly regenerated endcorpuscles were to be found.

The first traces of these regenerating endcorpuscles were found in the pieces of skin studied 5 months after the transplantation. Seven months after the transplantation full-grown GRANDRY-corpuscles were found in large numbers.

The newly-formed endcorpuscles appear to be built perfectly normally; most of them are of the two-cell type, as it is generally found in the normal skin, sometimes we found even larger ones, consisting of three or four cells

(as is shown in the microphoto of fig. 3). Beside these GRANDRY-corpuscles we found here and there newly-formed HERBST-corpuscles, but built a little abnormally, and therefore not always easily recognizable.

Thus we find after the transplantation of a piece of skin from the bill on the leg a formation of typical sensory corpuscles characteristic for the skin of the bill and not for the leg, as for example KADANOFF supposed, when he transplanted a piece of the hairy skin of the snout (in mammals) on the sole of the foot, and when a piece of the skin of the leg is transplanted on the bill, the ingrowing regenerating nerve fibers are not able to impel the tissues of the transplanted skin of form endorgans, which are not found normally in the skin of the leg.

The formation of sensitive endorgans in the transplanted skin appears thus to be in correspondence with the origin of the piece ("herkunfts-gemäss") and not in correspondence with the nature of the ingrowing regenerating nerves and the nature of the surrounding skin.

It remains possible of course, that after a long time in connection with the influences and impulses acting upon the transplanted piece of skin in its new surrounding a reorganization of the innervation and a formation of new endcorpuscles of the nature of those present in these surroundings normally, may occur; we can only say, that in the cases studied by us and in the long time (11 months) allowed for regeneration after the transplantation, no trace of such a reorganization of the innervation was met with.

Mathematics. — *Involutionen auf der trinodalen biquadratischen Kurve*
Von Prof. JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

§ 1. Die Punkte einer rationalen ebenen Kurve t^4 , vierter Ordnung, seien in die Gruppen einer Involution I^n geordnet. Diese hat ersichtlich $3(n-1)$ Paare gemein mit einer durch einen Strahlenbüschel erzeugten, zentralen, Involution I^4 . Demnach hüllen die Träger der Punktepaare der I^n eine Kurve der Klasse $3(n-1)$ ein (*Involutionsskurve* τ).

Der Träger eines Punktepaares X_1, X_2 trifft t^4 noch in zwei Punkten P, P' , welche einander zugeordnet sind in einer symmetrischen Verwandtschaft $[2(n-1)]$. Denn die zentrale I^3 auf den Strahlen durch P hat mit I^n $2(n-1)$ Paare gemein. Die $2(n-1)^2$ gemeinschaftlichen Paare von I^n und $[2(n-1)]$ liegen zu zweien auf $(n-1)^2$ *Doppeltangenten* der *Involutionsskurve*.

§ 2. Ausser diesen hat τ eine Anzahl *dreifache Tangenten*; diese entsprechen den *linearen Tripeln* der I^n .

Bildet man die Kurve t^4 auf eine Raumkurve ϱ^3 ab, so wird die Involution I_2^4 der linearen Quadrupel durch eine I_2^4 auf ϱ^3 ersetzt. Die Schmiegungebenen der Punkte eines Quadrupels bestimmen ein Tetraeder; der Ort der Eckpunkte der Tetraeder ist eine quadratische Fläche φ^2 . Denn die Schnittgerade zweier Schmiegungebenen ζ_1, ζ_2 eines Quadrupels trägt ausser ihren Schnittpunkten mit ζ_3 und ζ_4 keine weitere Punkte des Ortes (ein Punkt des Raumes trägt drei Schmiegungebenen) ¹⁾.

Die Schmiegungebenen in den Punkten einer Gruppe der Involution, welche der I^n auf t^4 zugeordnet ist, bilden ein vollständiges n -Flach, wonach der Ort der Eckpunkte eine Kurve der Ordnung $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ist. Weil diese der Fläche φ^2 in $(n-1)(n-2)$ Punkten begegnet, hat die Kurve τ offenbar $(n-1)(n-2)$ *dreifache Tangenten*.

Eine einfache Rechnung ergibt nun dass die *Ordnung* von τ $(n-1)(n+2)$, ihr *Geschlecht* $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ beträgt.

§ 3. Die Tangente in einem Punkte R von t^4 trifft diese noch in zwei Punkten S_1, S_2 . Weil ein Punkt S vier Punkten R zugeordnet ist, entsprechen R und S sich in einer $(2, 4)$; diese hat mit I^n $6(n-1)$ Paare gemein.

Der Punkt $R(X)$ trägt, ausser den $(n-1)$ Geraden, welche X verbinden mit den $(n-1)$ Punkten X' der durch X bestimmten Gruppe der I^n , noch $2(n-1)$ weitere Tangenten der τ , welche je ein Paar der I^n enthalten. Der Träger eines der oben erwähnten $6(n-1)$ Paare vertritt demnach zwei Tangenten; in dem betreffenden Punkte R berühren sich ersichtlich die Kurven t^4 und τ .

Jeder der $6(n-1)$ Träger vertritt offenbar zwei gemeinschaftliche Tangenten der beiden Kurven. Jede Gruppe der I^n , in welcher zwei Punkte zusammenfallen, liefert eine gemeinschaftliche Tangente; diesen besonderen Gruppen entsprechen somit $2(n-1)$ *gemeinschaftliche Tangenten*.

Die fehlenden $4(n-1)$ gemeinschaftlichen Tangenten enthalten je ein Punktepaar S_1, S_2 , welches einer Gruppe der I^n angehört. Weil S_1 und S_2 einander in einer [4] zugeordnet sind, und diese Verwandtschaft $4(n-1)$ Paare der I^n enthält, sind nunmehr *sämtliche gemeinschaftlichen Tangenten* ermittelt.

§ 4. Die Kurven t^4 und τ haben $4(n-1)(n+2)$ *Punkte gemein*. Ihre Berührungspunkte (§ 3) vertreten deren $12(n-1)$.

Wenn zwei Punkte, X_1 und X_2 , einer Gruppe der I^n vereinigt liegen, vertritt die Gerade, welche einen weiteren Punkt X der Gruppe mit $X_1(X_2)$ verbindet, zwei von den nach X zielenden Tangenten der τ , wonach X ein Punkt der τ ist. Diese Betrachtung liefert ersichtlich $2(n-1)(n-2)$ *gemeinschaftliche Punkte* der Kurven t^4 und τ .

¹⁾ Weil die drei neutralen Paare der I_2^4 je eine Gerade als Ort von Tetraederecken bestimmen, ist φ^2 eine Regelfläche. Die Geraden der zweiten Regelschaar entsprechen den Tripeln der Involutionen I^3 , welche die Schmiegungebenen zu Quadrupeln ergänzen.

Die übrigen $2n(n-1)$ entsprechen dem Falle dass die Träger x, y von zwei Paaren, X_1, X_2 und Y_1, Y_2 , sich in einem Punkte P von t^4 treffen.

Weil x zwei Punkte P enthält, entsprechen ihm $2(2n-3)$ Träger y (§ 3). Die symmetrische Verwandtschaft welche x und y einander zuordnet, würde, wenn τ eine Kurve vom Geschlechte null wäre, $4(2n-3)$ Koïnzidenzen besitzen. Aus $4(2n-3) = 2n(n-1)$ ergibt sich $n=2$ oder $n=3$. Nach § 2 ist τ in diesen beiden Fällen in der Tat eine rationale Klassenkurve.

Mathematics. — *Involutionen auf der nodalen Kubik.* Von Prof. JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

§ 1. Zwei Punktpaare A_1, A_2 und B_1, B_2 auf einer kubischen Kurve δ^3 , mit Doppelpunkt D , bestimmen auf dieser Kurve eine quadratische Involution I^2 . Nimmt man auf δ^3 noch zwei Punkte P_1, P_2 beliebig an, so bestimmen diese mit D und A_1, A_2 bez. B_1, B_2 zwei Kegelschnitte α^2 und β^2 , welche noch einen ausserhalb δ^3 liegenden Punkt P gemein haben. Der Kegelschnittbüschel (γ^2) mit der Basis D, P, P_1, P_2 bestimmt auf δ^3 eine I^2 , welche offenbar identisch ist mit der durch die Paare (A) und (B) bestimmten I^2 .

Jedem Punkte P ist ein Büschel (γ^2) zugeordnet. Der Büschel mit der Basis P, D, A_1, A_2 schneidet auf δ^3 eine I^2 ein. Eine zweite I^2 liefert der Büschel durch P, D, B_1, B_2 , und die beiden I^2 haben ein Paar gemein, das aus den oben als P_1, P_2 bezeichneten Basispunkten von (γ^2) besteht.

Der Strahlbüschel um einen Punkt M von δ^3 trifft diese in den Paaren einer zentralen I^2_0 . Diese hat mit einer nicht-zentralen I^2 ein Paar gemein. Weil M einem Paare dieser I^2 angehört, hüllen die Träger der Punktpaare eine Kurve zweiter Klasse ein. Für eine zentrale I^2_0 artet diese aus in zwei Strahlenbüschel, welche bez. M und D zu Mittelpunkten haben.

§ 2. Zwei Tripel A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 von δ^3 bestimmen auf dieser eine I^3 . Ein beliebig auf δ^3 angenommener Punkt E bestimmt mit D und (A) bez. (B) zwei Kegelschnitte, welche zwei ausserhalb der Kurve liegende Punkte F_1, F_2 gemein haben. Der Büschel (γ^2) durch D, E, F_1, F_2 bestimmt die durch (A) und (B) vorgegebene I^3 . Diese besitzt eine auf der Geraden $f \equiv F_1 F_2$ liegende lineare Gruppe L_1, L_2, L_3 .

Den Punkten E von δ^3 sind die Paare F_1, F_2 einer I^2 auf f zugeordnet. Eine I^3 hat demnach i. A. ein lineares Tripel. Besitzt sie zwei lineare

Tripel, so ist sie eine zentrale Involution und ihre Tripel werden durch einen Strahlenbüschel herausgeschnitten.

Eine I^3 ist bestimmt durch ein Tripel (A) und zwei Paare $B_1, B_2; C_1, C_2$. Auf dem Kegelschnitt α^2 durch $(A), D, E$ erzeugen die Büschel (β^2) , durch B_1, B_2, D, E , und (γ^2) , durch C_1, C_2, D, E , zwei Involutionen I^2 ; ihr gemeinschaftliches Paar F_1, F_2 bildet mit D und E die Basis des Büschels (ξ^2) , welches die I^3 erzeugt.

§ 3. Die Kegelschnitte durch D, E (auf δ^3) und F bestimmen auf δ^3 eine I^3 , deren neutrales Paar N_1, N_2 auf der Geraden EF liegt. Nun wird eine I^3_2 bestimmt durch drei Tripel $(A), (B), (C)$; diese bestimmen mit D drei Kegelschnittbüschel. Jeder dieser Büschel muss einen Kegelschnitt $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ enthalten welche die Bedingung erfüllen, dass sie sich, ausser in D , noch in einem Punkte E von δ^3 treffen. Auch durch ein Tripel (A) und das neutrale Paar N_1, N_2 wird eine I^3 festgelegt. Die Gerade $N_1 N_2$ trifft δ^3 noch in E und der Kegelschnitt durch $(A), D$ und E bestimmt auf $N_1 N_2$ den Punkt F .

§ 4. Zwei Quadrupel (A) und (B) bestimmen eine I^4 . Die Kegelschnitte α^2 und β^2 , welche sie mit D verbinden, treffen sich noch in drei ausserhalb δ^3 liegenden Punkten F_1, F_2, F_3 ; diese bilden mit D die Basis des Büschels (ξ^2) , welches die Gruppen der I^4 erzeugt. Den ausgearteten ξ^2 entsprechen drei lineare Tripel der I^4 . Wie ersichtlich ist I^4 durch diese Tripel bestimmt.

Sind von einer I^4 ein Quadrupel (A) , ein Tripel (B) und ein Paar (C) vorgegeben, so erzeugen die Kegelschnitte β^2 , durch D und (B) , auf dem durch D und (A) gelegten Kegelschnitt α^2 eine I^3 , indes die γ^2 durch D, C_1, C_2 eine I^3_2 erzeugen. Diese zwei Involutionen haben ein Tripel (F) gemein, welches mit D die Basis des Büschels (ξ^2) bildet.

§ 5. Die Kegelschnitte durch D und zwei Punkte F_1, F_2 erzeugen auf δ^3 eine I^4_2 . Sie besitzt auf der Geraden $F_1 F_2$ ein *neutrales Tripel*, denn jede Gerade durch D ergänzt $F_1 F_2$ zu einem ξ^2 ; man erhält somit nicht die allgemeine I^4_2 , welche bekanntlich drei neutrale Paare besitzt.

Die Kurven ξ^4 , welche Doppelpunkte haben in D und in zwei Punkten E_1, E_2 von δ^3 , und ausserdem drei beliebig gewählte Punkte F_1, F_2, F_3 enthalten, erzeugen auf δ^3 eine I^4_2 . Der Kegelschnitt ε^2_3 durch D, E_1, E_2, F_1, F_2 wird durch jeden Kegelschnitt des durch D, E_1, E_2, F_3 bestimmten Büschels zu einer ξ^4 ergänzt. Offenbar trifft ε^2_3 die Kurve δ^3 noch in einem neutralen Paare, welches mit jedem Paare der durch jenen Büschel erzeugten I^2 eine Gruppe der I^4_2 bildet. Analog erhält man durch zwei Kegelschnitte ε^2_1 und ε^2_2 noch zwei neutrale Paare.

Eine I^4_4 ist durch ihre neutralen Paare bestimmt, denn diese bestimmen mit D und zwei Punkten E_1, E_2 von δ^3 drei Kegelschnitte ε^2_k , welche sich zu zweien in den Basispunkten F_k treffen.

§ 6. Weil eine zentrale I^3 mit einer I^n auf δ^3 $2(n-1)$ Paare gemein hat, hüllen die Träger der Paare der I^n eine Kurve γ von der Klasse $2(n-1)$ ein. Bildet man die δ^3 auf eine kubische Raumkurve ϱ^3 ab, so erhält man auf dieser eine I^n , deren Tripel in den Schmiegungsebenen einer Kurve der Klasse $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ liegen; denn ein Punkt der ϱ^3 gehört den Tripeln der durch ihn bestimmten Gruppe der I^n an. Die linearen Tripel der δ^3 bilden ersichtlich eine I_2^3 ; diese wird abgebildet auf die I_2^3 , welche durch die Ebenen eines Bündels erzeugt wird. Hieraus erhellt dass die auf δ^3 vorgegebene I^n $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ lineare Tripel besitzt; ihre Involutionsskurve γ hat demnach $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dreifache Tangenten. Weil sie keine Doppeltangenten besitzt, ist sie eine Kurve der Ordnung $n(n-1)$ und vom Geschlecht $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$.

§ 7. Die Punkte P der δ^3 und ihre Tangentialpunkte P' entsprechen sich in einer Verwandtschaft (1, 2). Demnach gibt es $3(n-1)$ Paare der I^n , welche aus einem Punkte P und seinem Tangentialpunkte P' bestehen. Die Tangente in P vertritt alsdann zwei der aus P an γ gelegten Tangenten, wonach die Kurven δ^3 und γ sich in P berühren.

Die hiermit ausgezeichneten Tangenten vertreten offenbar $6(n-1)$ gemeinschaftliche Tangenten der beiden Kurven; die übrigen $2(n-1)$ sind Träger der Doppelpunkte $X_1 \equiv X_2$ der I^n .

Die gemeinschaftlichen Punkte der Kurven δ^3 und γ bilden drei Gruppen. Zunächst vertreten ihre $3(n-1)$ Berührungspunkte eine Gruppe von $6(n-1)$ Punkten.

In einer Gruppe der I^n mit einem Doppelement $X_1 \equiv X_2$ gibt es noch $(n-2)$ Punkte X_k ; diese gehören der Kurve γ an, weil für sie zwei der aus ihnen an γ gelegten Tangenten zusammenfallen. Sie gehören somit einer Gruppe von $2(n-1)(n-2)$ Schnittpunkten der beiden Kurven an.

Ein Punkt P der δ^3 trägt $(n-1)$ Strahlen, welche je ein Paar der I^n enthalten. Wenn zwei dieser Geraden zusammenfallen, liegt P auf γ . Die dritte Gruppe enthält ersichtlich $(n-1)(n-2)$ Punkte.

Mathematics. — Ueber die Transversalen von vier Ebenen im R_5 .
Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

Zu vier zweidimensionalen Ebenen im projektiven fünfdimensionalen Raume gibt es im Allgemeinen drei Transversalen, d.h. Gerade, die alle vier Ebenen in einem Punkte treffen. Ich stelle hier eine Gleichung dritten Grades auf, von deren Lösung die Ermittlung dieser Transversalen abhängt und leite eine zweite Gleichung dritten Grades her, deren Wurzeln

die Doppelverhältnisse der vier Schnittpunkte einer Transversalen mit den Ebenen darstellen.

§ 1.

Wir zeigen zuerst dass im allgemeinen Falle drei Geraden existieren, die die vier Ebenen a , α , p und π schneiden. Es sei a durch die drei Punkte y , z und t , die Ebene α durch die drei Punkte ξ , η und ζ bestimmt. Es ist dann $a_{ikl} = (yzt)_{ikl}$ und $\alpha_{ikl} = (\xi\eta\zeta)_{ikl}$. Wir wählen in a einen Punkt $P_r = r_1 y + r_2 z + r_3 t$ und verbinden ihn mit der dritten Ebene p . Der Verbindungs- R_3 trifft die zweite Ebene α in einem Punkte P_r^3 mit der Gleichung $(\alpha^3 p^2 P_r) (pu') = 0$ oder

$$(p^2 \xi \eta \zeta P_r) (pu') = 0.$$

Bringen wir hier alle drei Reihen p in den Klammerfaktor, so gibt dies

$$(p^3 P_r \eta \zeta) (u' \xi) + (p^3 P_r \zeta \xi) (u' \eta) + (p^3 P_r \xi \eta) (u' \zeta) = 0 \quad . \quad (1)$$

Die Verbindungslinie $P_r P_r^3$ ist dann die einzige Gerade durch P_r in a , die α und p schneidet. Ebenso geht durch P_r in a eine einzige Gerade $P_r P_r^4$, die α und π trifft, wobei der Punkt P_r^4 analog zu (1) die Gleichung hat:

$$(\pi^3 P_r \eta \zeta) (u' \xi) + (\pi^3 P_r \zeta \xi) (u' \eta) + (\pi^3 P_r \xi \eta) (u' \zeta) = 0 \quad . \quad (2)$$

Aus (1) lesen wir ab, dass $(p^3 P_r \eta \zeta) : (p^3 P_r \zeta \xi) : (p^3 P_r \xi \eta)$ die ternären Koordinaten des Punktes P_r^3 in α sind in Bezug auf das Koordinatendreieck $\xi \eta \zeta$. Soll nun durch P_r in a eine Gerade gehen, die alle vier Ebenen schneidet, so muss $P_r^3 = P_r^4$ sein; dies gibt also

$$\left. \begin{aligned} (p^3 P_r \eta \zeta) &= \tau \cdot (\pi^3 P_r \eta \zeta) \\ (p^3 P_r \zeta \xi) &= \tau \cdot (\pi^3 P_r \zeta \xi) \\ (p^3 P_r \xi \eta) &= \tau \cdot (\pi^3 P_r \xi \eta) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzt man hier $P_r = r_1 y + r_2 z + r_3 t$ ein und eliminiert τ , so ergeben sich drei quadratische Gleichungen in r_i , also drei Kegelschnitte in der Ebene a . Sie gehen durch drei gemeinsame Punkte P_r und durch jeden dieser drei Punkte geht eine einzige Transversale die alle vier Ebenen trifft.

Setzen wir $P_r = r_1 y + r_2 z + r_3 t$ in (3) ein und eliminieren $r_1 : r_2 : r_3$, so ergibt sich für τ die Gleichung dritten Grades

$$\begin{vmatrix} (p^3 y \eta \zeta) - \tau (\pi^3 y \eta \zeta) & (p^3 z \eta \zeta) - \tau (\pi^3 z \eta \zeta) & (p^3 t \eta \zeta) - \tau (\pi^3 t \eta \zeta) \\ (q^3 y \zeta \xi) - \tau (\pi^3 y \zeta \xi) & (q^3 z \zeta \xi) - \tau (\pi^3 z \zeta \xi) & (q^3 t \zeta \xi) - \tau (\pi^3 t \zeta \xi) \\ (r^3 y \xi \eta) - \tau (\pi^3 y \xi \eta) & (r^3 z \xi \eta) - \tau (\pi^3 z \xi \eta) & (r^3 t \xi \eta) - \tau (\pi^3 t \xi \eta) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Hier sind p , q und r äquivalent und ebenso π , ϱ und σ .

Aus (4) erhält man nach einiger Rechnung:

$$v^3 \cdot A_{14} A_{24}^2 + 9v^2 \cdot A_{24} J_{4123} + 9v \cdot A_{23} J_{3124} + A_{13} A_{23}^2 = 0 \quad \dots \quad (5)$$

Hierbei sind die A_{ik} die sechs simultanen Invarianten von je zwei der Ebenen, z.B.

$$A_{12} = (a^3 a^3) = 36 \sum a_{123} a_{456}.$$

Dagegen ist

$$J_{4123} = (\pi^3 a^2 a) (a a^2 p^3)$$

und es gelten die Beziehungen¹⁾:

$$J_{4123} = J_{3124} + \frac{1}{9} (-A_{12} A_{34} + A_{13} A_{24} - A_{14} A_{23}) \quad \dots \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{3124} &= J_{1234} - \frac{1}{9} A_{12} A_{34} + \frac{8}{9} A_{13} A_{42} - \frac{1}{9} A_{14} A_{23} \\ J_{4123} &= J_{1234} - \frac{8}{9} A_{12} A_{34} + \frac{1}{9} A_{13} A_{42} - \frac{8}{9} A_{14} A_{23} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

§ 2.

Jede der drei Transversalen T_v trägt vier Punkte, ihre Schnittpunkte mit den vier Ebenen. Wir nennen j_1 , j_2 und j_3 die drei zugehörigen Doppelverhältnisse und wollen die Gleichung dritten Grades ermitteln, deren Wurzeln diese j_v sind.

Wir denken uns die Ebene a durch y , z und t , die Ebene α durch die drei Punkte ξ , η , und ζ , die Ebene p durch $y + \lambda \cdot \xi$, $z + \mu \cdot \eta$, $t + \nu \cdot \zeta$ und die vierte Ebene π durch die Punkte $y + \alpha \cdot \xi$, $z + \beta \cdot \eta$ und $t + \gamma \cdot \zeta$ bestimmt, sodass auf den Transversalen T_v die Punktequadrupel liegen:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \dots y, \xi, y + \lambda \cdot \xi, y + \alpha \cdot \xi & \quad j_1 = \frac{\lambda}{\alpha} \\ T_2 \dots z, \eta, z + \mu \cdot \eta, z + \beta \cdot \eta & \quad \text{mit} \quad j_2 = \frac{\mu}{\beta} \\ T_3 \dots t, \zeta, t + \nu \cdot \zeta, t + \gamma \cdot \zeta & \quad j_3 = \frac{\nu}{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (8)$$

Mit diesen Annahmen ergibt sich, wenn

$$D = (y z t \xi \eta \zeta) \neq 0$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} A_{12} &= 36D & A_{34} &= 36D (\alpha - \lambda) (\beta - \mu) (\gamma - \nu) \\ A_{13} &= 36D \lambda \mu \nu & A_{42} &= 36D \\ A_{14} &= 36D \alpha \beta \gamma & A_{23} &= -36D \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{1234} &= -\frac{1}{9} (36D)^2 [\lambda (\beta - \mu) (\gamma - \nu) + \mu (\alpha - \lambda) (\gamma - \nu) + \nu (\alpha - \lambda) (\beta - \mu)] \\ J_{4123} &= \frac{1}{9} (36D)^2 [\lambda \beta \gamma + \mu \gamma \alpha + \nu \alpha \beta] \\ J_{1342} &= \frac{1}{9} (36D)^2 [\alpha \mu \nu + \beta \nu \lambda + \gamma \lambda \mu] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

¹⁾ Vgl. diese Proceedings 35, October 1932, p. 1026—1029.

Hieraus erhält man:

$$\left. \begin{aligned} j_1 + j_2 + j_3 &= -9 \frac{J_{4123}}{A_{14} A_{23}} \\ j_2 j_3 + j_3 j_1 + j_1 j_2 &= -9 \frac{J_{1342}}{A_{14} A_{23}} \\ j_1 j_2 j_3 &= -\frac{A_{13} A_{42}}{A_{14} A_{23}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Somit ergibt sich die gesuchte Gleichung dritten Grades in der Gestalt

$$j^3 \cdot A_{14} A_{23} + 9j^2 \cdot J_{4123} - 9j \cdot J_{1342} + A_{13} A_{42} = 0. \quad \dots (12)$$

Da die drei Doppelverhältnisse j_v willkürlich wählbar sind, haben wir hier drei irrationale absolute projektive Invarianten. In (11) stehen drei rationale absolute Invarianten. Die ganzen rationalen projektiven Invarianten haben als Integritätsbasis die sechs Invarianten A_{ik} und eine der Invarianten $J_{\kappa\lambda\mu\nu}$.

Astronomy. — *Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen.*
X. *T Ursae Majoris*. Von A. A. NIJLAND.

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

Instrumente *S* und *R*. Die Beobachtungen wurden alle auf *R* reduziert; die Reduktion *R*—*S* beträgt $-0^m.13$. Spektrum M3—6e (H.A. 79, 172). Gesamtzahl der hier zu besprechenden Beobachtungen 764 (von 2416847 bis 2426979). Es wurden wieder, wie in allen früheren Mitteilungen, die in zwei Instrumenten angestellten Schätzungen nur einmal gezählt.

Karte: HAGEN, *Atlas Stell. var. Series III*.

Stern *n* ist H.A. 37, 7 mit *y* bezeichnet.

Das Spektrum der dritten Spalte wurde den *Harv. Ann.* 95 entnommen. Die daselbst mitgeteilten Grössen für die Sterne *C*, *B*, *A*, *a* und β sind mit den Angaben aus H.A. 37 identisch, ausgenommen für Stern *C*, dessen Helligkeit $= 6^m.46$ gegeben wird.

Die Grössen von MITCHELL (6. Spalte) findet man in den *Mem. Am. Ac.* 14, S. 285 als Mittel mehrerer sehr gut übereinstimmenden photometrischen Messungen (HARVARD, YERKES, LICK, MC. CORMICK). Die Sterne *e*, *f* und *g* wurden 7-mal an die Grenze von *S*, die Sterne *m* und *n*, sowie ein mit *w* in H.A. 37, 7 bezeichneter Stern 10-mal an die Grenze von *R* angeschlossen. Für *f* geht daraus die Grösse $11^m.35$, für *n* die Grösse $14^m.25$ hervor. Die Stufenskala bezieht sich auf die Helligkeit $11^m.0$; der Stufenwert ist

A. A. NIJLAND: MITTLERE LICHTKURVEN VON LANGPERIODISCHEN
VERÄNDERLICHEN. X. T. URSAE MAJORIS.

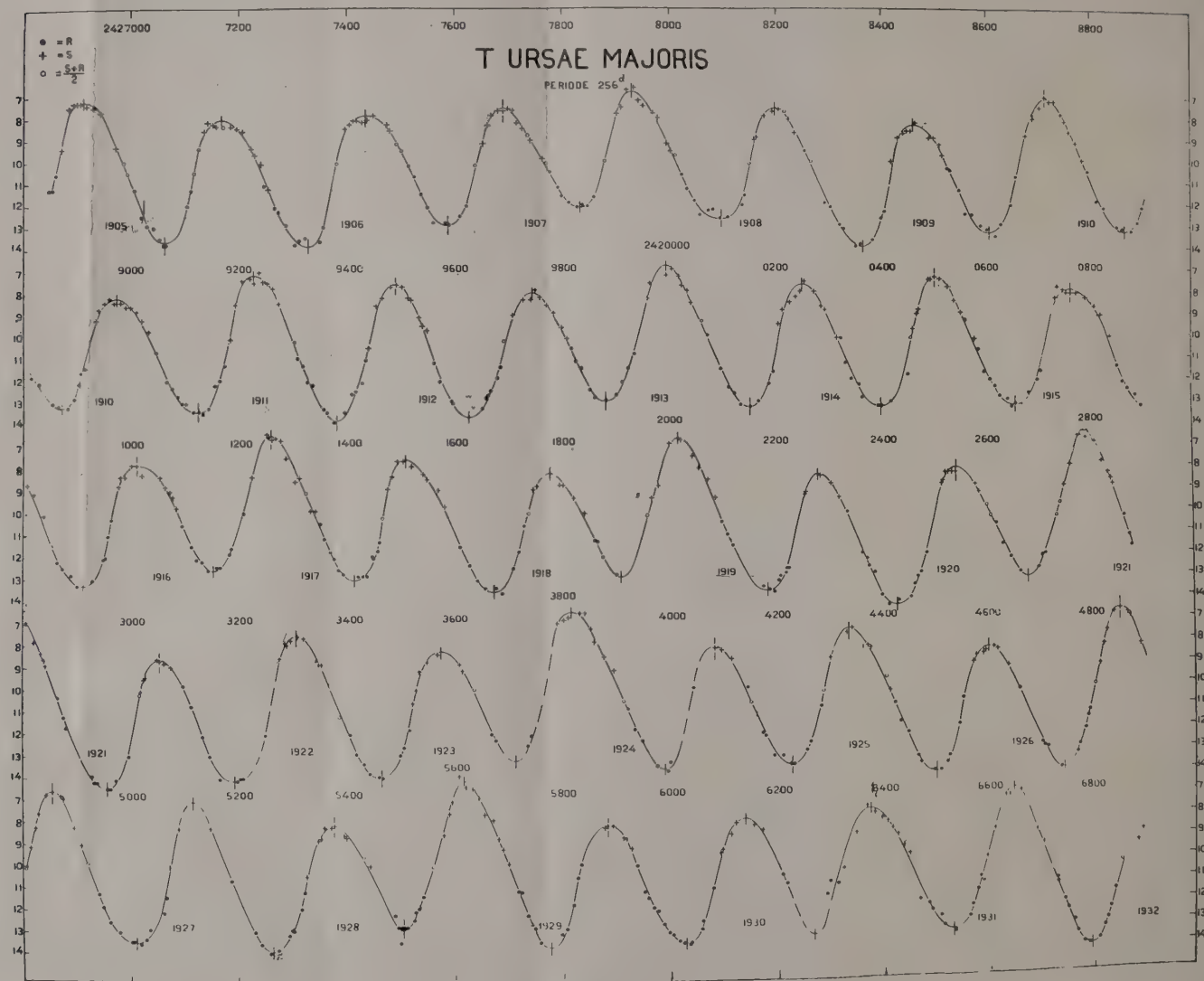


Fig. 1.

TABELLE I. Vergleichsterne.

	BD	Sp.	HAGEN	St.	PD	PD red.	HA 37	HA 74	H
C	+ 61.1312	K 0	—	78.2	^m 6.56 G —	^m 6.56	^m 6.42	^m 6.61	^m 6.35
B	+ 61.1309	K 0	—	71.6	7.17 WG —	7.02	7.10	7.02	7.02
A	+ 61.1307	K 0	—	66.9	7.45 WG	7.37	7.38	7.18	7.52
a	+ 60.1416	A 3	2	62.2	—	—	7.87	8.01	8.02
β	+ 60.1413	G 5	4	57.0	—	—	8.30	—	8.57
b	+ 60.1405	—	7	51.2	—	—	9.21	9.01	9.19
c	+ 60.1411	—	9	45.5	—	—	9.80	9.89	9.80
d	—	—	11	40.1	—	—	—	10.56	10.38
e	+ 60.1410	—	14	35.2	—	Grenze	—	10.80	10.90
f	—	—	17	28.7	MITCHELL	11.35	11.52	11.38	11.59
g	—	—	20	21.4	12.59	—	12.31	12.54	12.38
h	—	—	21	20.3	12.67	—	12.28	12.60	12.49
j	—	—	23	(15.9)	13.27	—	—	13.39	13.17
k	—	—	25	13.0	—	—	—	—	13.27
l	—	—	27	9.6	—	—	—	13.52	13.63
m	—	—	29	4.4	—	—	—	—	14.18
n	—	—	—	(0.0)	—	14.25	—	—	14.25

0^m.106. Der Anschluss an die photometrischen Helligkeiten ist diesmal sehr befriedigend, ausgenommen für die nur sehr selten benutzten Sterne *j* und *n*; diesen Sternen wurde deshalb bei der Diskussion ein kleineres Gewicht beigelegt.

Es liegen 93 Schätzungen der Farbe vor, welche zum grössten Teil in den Jahren 1905 bis 1913 angestellt wurden. Aus den Tabellen IIa und IIb könnte man den Schluss ziehen, dass die Farbe erstens nahe beim Maximum um 0^m.8 gelber wäre als in den schwächeren Phasen, und sich zweitens vom J. 1911 an etwas vertieft hätte, doch kommen mir diese Farbenänderungen etwas verdächtig vor. Das allgemeine Mittel ist 1^c.61.

Die Figur 1 enthält die Beobachtungen, alle auf *R* reduziert. Die Reihe der Abweichungen (Beobachtung minus Kurve) zeigt 259 Plus-, 264 Minuszeichen, 241 Nullwerte, 223 Zeichenfolgen, 299 Zeichenwechsel. Das Mittel der absoluten Werte der Abweichungen ist 0^m.112.

Ein Einfluss des Mondscheines auf die Helligkeitsschätzung ist nicht bemerkbar. Es verteilen sich auf 237 bei Mondschein angestellte Beobachtungen die Abweichungen wie folgt: 65 Plus-, 80 Minuszeichen, 92 Nullwerte.

TABELLEN IIa und IIb. Farbenschätzungen.

Zeitraum	<i>n</i>	Farbe	Grösse	<i>n</i>	Farbe
²⁴¹ 6987—7493	17	^c 1.32	^m 6.62	11	^c 2.41
7652—7994	18	1.36	7.25	12	1.58
8010—8951	18	1.33	7.60	12	1.67
²⁴² 9192—1504	21	1.93	7.89	12	1.63
2533—6395	19	2.00	8.14	12	1.42
	—	—	8.34	12	1.38
	93	1.59	8.63	11	1.23
			9.38	11	1.59
				93	1.61

Die Tabelle III enthält die aus der Kurve abgelesenen Epochen der Minima *m* und der Maxima *M*.

Die Spalte *R* wurde mit den einfachen Elementen :

$$2421929^d + 255^d.6 E \text{ (für die Minima)}$$

und $2422034^d + 255^d.6 E \text{ (für die Maxima)}$
gerechnet.

Die übrigbleibenden *B—R* sind gross und zeigen einen ausgeprägt systematischen Charakter; es wurde für Maxima und Minima zusammen auf graphischem Wege ein Sinusglied abgeleitet, und die definitiven Elemente *F* lauten dann :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimum: } 2421928^d \\ \text{Maximum: } 2422033 \end{array} \right\} + 255^d.6 E + 9^d \sin 15^\circ (E-8);$$

$$\frac{M-m}{P} = 0.411.$$

Auf eine genauere Rechnung habe ich verzichtet.

PRAGER's Katalog für 1932 gibt den Periodenwert $255^d.0$, und das aus sämtlichen von mir seit d. J. 1905 in den *Astr. Nachr.* mitgeteilten Epochen der Minima und Maxima abgeleitete allgemeine Mittel ist $254^d.8$.

Da die Berücksichtigung des Sinusgliedes die Quadratsummen der Abweichungen für die Minima und die Maxima zusammen von 6532 auf 3331 herabdrückt, so scheint die Formel *F* für den hier besprochenen Zeitraum einiges Vertrauen beanspruchen zu dürfen. Für die älteren Epochen gelten allerdings andere Elemente (s. *G. und L.* I, S. 337). Das daselbst abgeleitete Sinusglied mit einer Periode von 30 Perioden und einer Amplitude von 12^d , das sämtliche Maxima und Minima aus den Jahren 1860 bis

TABELLE III.

E	Minima <i>m</i>					Maxima <i>M</i>				
	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>
- 20	—	—	—	—	—	²⁴¹ 6912	^m 7.2	6922	- 10	- 1
- 19	²⁴¹ 7062	^m 13.7	7073	- 11	- 3	7170	8.1	7178	- 8	0
- 18	7328	13.9	7328	0	+ 5	7435	7.9	7433	+ 2	+ 7
- 17	7587	12.9	7584	+ 3	+ 6	7691	7.6	7689	+ 2	+ 5
- 16	7831	12.1	7839	- 8	- 7	7930	6.8	7944	- 14	- 13
- 15	8096	12.7	8095	+ 1	0	8198	7.6	8200	- 2	- 3
- 14	8363	13.9	8351	+ 12	+ 9	8459	8.3	8456	+ 3	0
- 13	8605	13.3	8606	- 1	- 7	8712	7.1	8711	+ 1	- 5
- 12	8869	13.3	8862	+ 7	0	8973	8.2	8967	+ 6	- 1
- 11	9124	13.5	9117	+ 7	- 1	9227	7.2	9222	+ 5	- 3
- 10	9381	13.9	9373	+ 8	0	9489	7.6	9478	+ 11	+ 3
- 9	9629	13.7	9629	0	- 7	9743	8.0	9734	+ 9	+ 2
- 8	9880	13.0	9884	- 4	- 11	9992	6.8	9989	+ 3	- 4
- 7	²⁴² 0150	13.3	0140	+ 10	+ 5	²⁴² 0246	7.6	0245	+ 1	- 4
- 6	0398	13.3	0395	+ 3	- 1	0500	7.3	0500	0	- 4
- 5	0654	13.3	0651	+ 3	+ 2	0761	7.9	0756	+ 5	+ 4
- 4	0910	13.3	0907	+ 3	+ 4	1011	7.9	1012	- 1	0
- 3	1152	12.7	1162	- 10	- 7	1259	6.5	1267	- 8	- 5
- 2	1411	13.1	1418	- 7	- 1	1507	7.6	1523	- 16	- 10
- 1	1670	13.7	1673	- 3	+ 4	1775	8.3	1778	- 3	+ 4
0	1907	13.1	1929	- 22	- 13	2014	6.7	2034	- 20	- 11
+ 1	2183	13.7	2185	- 2	+ 8	2276	8.3	2290	- 14	- 4
+ 2	2427	14.4	2440	- 13	- 3	2540	8.1	2545	- 5	+ 5
+ 3	2675	13.2	2696	- 21	- 11	2788	6.5	2801	- 13	- 3
+ 4	2956	14.5	2951	+ 5	+ 13	3052	8.6	3056	- 4	+ 4
+ 5	3192	14.2	3207	- 15	- 8	3305	7.6	3312	- 7	0
+ 6	3462	14.1	3463	- 1	+ 5	3571	8.4	3568	+ 3	+ 9
+ 7	3710	13.4	3718	- 8	- 5	3814	6.6	3823	- 9	- 6
+ 8	3988	13.8	3974	+ 14	+ 15	4081	8.2	4079	+ 2	+ 3
+ 9	4227	13.7	4229	- 2	- 4	4334	7.4	4334	0	- 2
+ 10	4500	14.0	4485	+ 15	+ 11	4600	8.3	4590	+ 10	+ 6
+ 11	4745	14.0	4741	+ 4	- 1	4855	6.6	4846	+ 9	+ 4
+ 12	5009	13.5	4996	+ 13	+ 6	5113	7.1	5101	+ 12	+ 5
+ 13	5263	14.0	5252	+ 11	+ 3	5375	8.3	5357	+ 18	+ 10
+ 14	5503	13.0	5507	- 4	- 12	5614	6.3	5612	+ 2	- 6
+ 15	5777	13.9	5763	+ 14	+ 6	5882	8.3	5868	+ 14	+ 6
+ 16	6027	13.7	6019	+ 8	+ 2	6138	8.1	6124	+ 14	+ 8
+ 17	6267	13.4	6274	- 7	- 13	6374	7.7	6379	- 5	- 11
+ 18	6530	13.3	6530	0	- 3	6647	6.9	6635	+ 12	+ 9
+ 19	6796	14.1	6785	+ 11	+ 9	—	—	—	—	—
		13.53			± 6		7.58			± 5

1913 befriedigend darstellt, verträgt sich aber offenbar wieder nicht mit meinen Epochen. Die extremen Werte des Lichtwechsels sind:

$$\begin{aligned} \text{Minimum: } v &= 13^{\text{m}}.53 \pm 0^{\text{m}}.082 \\ \text{Maximum: } v &= 7^{\text{m}}.58 \pm 0^{\text{m}}.111 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Minimum: } v &= 13^{\text{m}}.53 \pm 0^{\text{m}}.082 \\ \text{Maximum: } v &= 7^{\text{m}}.58 \pm 0^{\text{m}}.111 \end{aligned}} \right\} (\text{m F.}).$$

Die Amplitude beträgt somit $5^{\text{m}}.95$. Es lässt sich weder beim Minimum noch beim Maximum eine deutliche Gesetzmässigkeit im Verlaufe der extremen Werte feststellen. Es wurde wieder der mittlere Verlauf der Lichtkurve in der Nähe der beiden Hauptphasen durch Ablesung der Helligkeit für je 10^{d} abgeleitet. Die beiden Teilkurven schliessen sich fast genau an einander an (s. die Figur 2), und geben zusammen den Verlauf

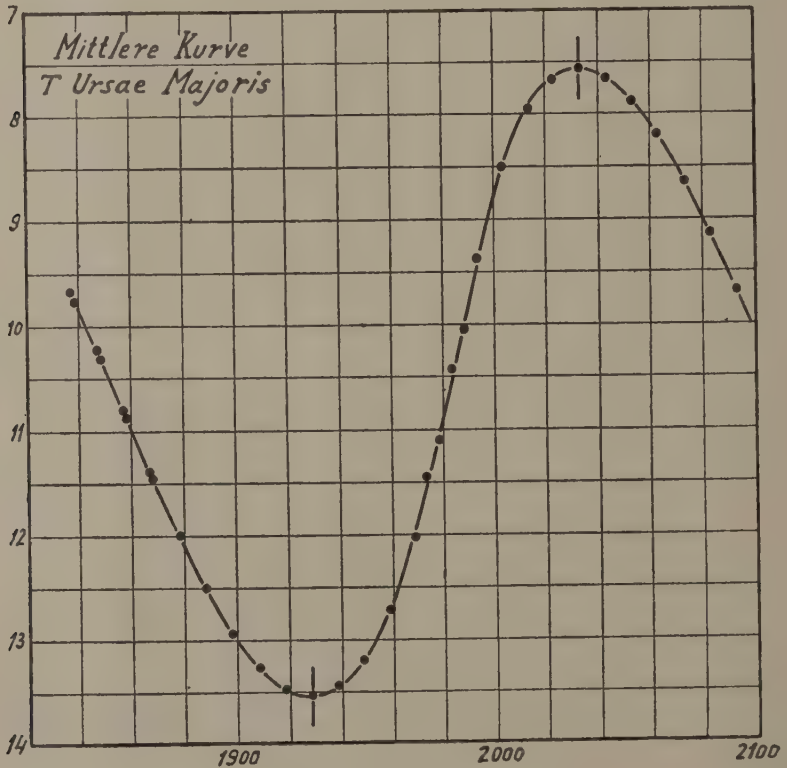


Fig. 2.

der mittleren Kurve (Tabelle IV). Die Kurve ist vollständig glatt und den Lichtkurven von *W Herculis*, *R Trianguli* und *S Bootis* sehr ähnlich.

Die Streuung in der Nähe von 60^{d} erreicht die Werte:

	<i>m</i>	<i>M</i>	Mittel
im aufsteigenden Aste:	0.377	0.454	0.415
im absteigenden Aste:	0.252	0.320	0.286
Mittel:	0.315	0.387	

TABELLE IV. Die mittlere Kurve.

Phase	ν	Phase	ν	Phase	ν	Phase	ν
— ^d 90	^m 9.74	— ^d 20	^m 13.27	+ ^d 50	^m 11.00	+ ^d 120	^m 7.75
— 80	10.31	— 10	13.47	+ 60	9.96	+ 130	8.03
— 70	10.88	0	13.53	+ 70	8.92	+ 140	8.42
— 60	11.45	+ 10	13.46	+ 80	8.20	+ 150	8.89
— 50	11.99	+ 20	13.19	+ 90	7.78	+ 160	9.40
— 40	12.50	+ 30	12.72	+ 100	7.60	+ 170	9.97
— 30	12.93	+ 40	11.96	+ 110	7.59	—	—

Die Streuung ist wieder grösser beim Maximum, und grösser im aufsteigenden Aste. Das Verhältnis der Streuungen $0^m.415$ und $0^m.286$ ist 1.45, das Verhältnis der durchschnittlichen Geschwindigkeiten des Lichtwechsels bei Auf- und Abstieg 1.43.

Zusammenfassung.

Aus 764 in den Jahren 1905 bis 1932 (2416847 bis 2426979) angestellten Beobachtungen von *T Ursae Majoris* sind die folgenden Elemente des Lichtwechsels abgeleitet worden:

$$\begin{aligned} \text{Minimum: } 2421928^d \} & + 255^d.6 E + 9^d \sin 5^\circ (E-8); & \nu &= 13^m.53 \\ \text{Maximum: } 2422033 \} & & \nu &= 7.58 \\ & & \text{Amplitude} &= 5.95, \end{aligned}$$

woraus $\frac{M-m}{P} = 0.411.$

Die mittlere Lichtkurve hat einen vollkommen glatten Verlauf.

Utrecht, November 1932.

Chemistry. — *Osmotic systems, in which non-diffusing substances may occur also. II. Equilibrium and the change of the permeability of the membrane.* By F. A. H. SCHREINEMAKERS.

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

We take the free equilibrium

$$L(d+n)_P | L'(d+n')_{P'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in which d diffusing substances, n non-diffusing ones on the left side and n' non-diffusing ones on the right side of the membrane. If we do not pay attention to the quantities of the liquids L and L' , which quantities in this free equilibrium may be varied arbitrarily whenever desired, then (1) has

$$d + n + n' \text{ freedoms. (2)}$$

If we replace the membrane by an other, or when it changes its nature under some influence or other, we may imagine several cases.

We shall say that a membrane becomes less permeable, when it becomes impermeable for one or more of the diffusing substances (and at the same time also remains impermeable for the substances that were already non-diffusing); here also belongs the special case that the membrane becomes impermeable for all substances.

When the reverse takes place, namely that the membrane becomes permeable for one or more of the non-diffusing substances (and at the same time also remains permeable for the substances that were diffusing already) we shall say that it becomes more permeable.

We may also imagine that the membrane changes, without this causing a change in the diffusing and non-diffusing substances; then we shall say that the membrane remains equipermable.

Of course we may suppose besides that the membrane becomes permeable for one or more of the non-diffusing substances and at the same time impermeable for one or more of the diffusing substances. Then, according to the meaning I have attached to more- and less-permeable, it is neither completely the one, nor completely the other; for this reason I shall call it m.l.-permeable.

All these changes may be a result of the influence of the substances present, of changes of tension in the membrane, of the age, hysteresis etc.; in nature also other factors as e.g. stimuli may be the cause¹⁾.

We shall first discuss now what influence this change of permeability can have on the number of freedoms of the free equilibrium (1).

1. When the membrane remains equipermable, so that d , n and n' do not change, the number of freedoms does not change.

2. We now imagine that the membrane becomes less permeable for q diffusing substances. Then only $d-q$ diffusing substances remain, but $n+q$ non-diffusing ones on the left side and $n'+q$ non-diffusing ones on the right side. The number of freedoms is then

$$(d-q) + (n+q) + (n'+q) = d + n + n' + q \quad . . . (3)$$

¹⁾ Comp. e.g. J. M. JANSE. The Verslagen 4, 332 (1888); 35, 418 (1926); M. F. E. NICOLAI, Diss. Leiden 1929, in which other literature is found also.

and has increased, therefore, with q . From this it follows e.g.: when the membrane of the equilibrium ¹⁾

$$L(W + X + \bar{Y} + \bar{Z} + \bar{U})_p | L'(W + X + \bar{Y} + \bar{Z} + \bar{V})_{p'} \quad (4)$$

becomes impermeable for the substances X , the number of freedoms increases with one.

3. Now we assume that the membrane becomes more permeable for r of the non-diffusing substances, each occurring on the two sides of the membrane.

Then there will be $d + r$ diffusing substances, but only $n - r$ non-diffusing ones will remain on the left side and $n' - r$ non-diffusing ones on the right side of the membrane. The number of freedoms then becomes

$$(d + r) + (n - r) + (n' - r) = d + n + n' - r \quad (5)$$

and has consequently decreased with r . From this it follows e.g.:

when the membrane of (4) also becomes permeable for $Y(Z)$, the number of freedoms will decrease with one; when it becomes permeable for Y and Z at the same time, it will decrease with two.

4. Now we suppose that the membrane becomes more permeable for s of the non-diffusing substances, occurring only on the left side and for s' of the non-diffusing substances, occurring only on the right side of the membrane.

Then there will be $d + s + s'$ diffusing substances, but only $n - s$ non-diffusing ones will remain on the left side and $n' - s'$ non-diffusing ones on the right side. The number of freedoms then is:

$$(d + s + s') + (n - s) + (n' - s') = d + n + n' \quad (6)$$

and has consequently not changed.

From this it appears that the number of freedoms will not change when the membrane of (4) becomes permeable for U or for V or for both.

5. If we now imagine that the membrane becomes m.l.-permeable, then we can easily find that the number of freedoms will increase with $q - r$, in which q and r have the same meaning as sub 2 and 3. Then the number of freedoms can increase, decrease or remain constant.

From this it follows among other things that the number of freedoms of (4) will not change when the membrane becomes impermeable for X and permeable for Y or Z . The number of freedoms will decrease with one, however, when the membrane becomes impermeable for X and permeable for Y and Z .

In either case it does not matter whether the membrane does become permeable at the same time for U or V or for both, or does not.

¹⁾ The dash, placed above a substance, indicates as in the preceding communication, that the membrane is impermeable for that substance.

Above we have until now only paid attention to the change in the number of freedoms; we are now going to discuss also the change, which can occur in the state of an equilibrium. Instead of the free equilibrium I take for this purpose some definite equilibrium or other, so that the quantity of each of the substances present and the pressures P and P' are determined. Then we have a definite $P.Q.$ -equilibrium

$$m \times L(d+n)_P | m' \times L'(d+n')_{P'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

This equilibrium has no freedom left and only exists in a single, entirely determined state, the quantities m and m' of the two liquids being determined also (comp. L. Comm. I).

For an osmotic system with d diffusing substances to be in equilibrium, it is necessary and sufficient that d equations

$$O.A = (O.A)' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

are satisfied, expressing that each of the d diffusing substances on both sides of the membrane has the same $O.A.$; the $O.A.$'s of the non-diffusing substances do not play a part here; their concentrations, however, as well as those of the diffusing substances, occur in the d equations (8). We now shall distinguish the following cases.

a. We now suppose in the same way as above sub 1, that the membrane remains equipermable; it is clear that the state of (7) then cannot change.

b. We now assume that in the same way as above sub 2, the membrane becomes less permeable for q of the diffusing substances. As each of the d diffusing substances of (7) has the same $O.A.$ on both sides, it is clear that this must still be the case for the $d-q$ remaining substances; consequently the equilibrium will not have changed.

From a and b now follows:

A. when a membrane remains equipermable or becomes less permeable, the state of the equilibrium does not change. Of course this still obtains also when the membrane becomes completely impermable; then, however, we cannot speak of an equilibrium any longer.

c. We now suppose as above sub 3 that the membrane becomes more permeable for r non-diffusing substances, all occurring on both sides of the membrane. The d diffusing substances, which already had in (7) the same $O.A.$ on both sides, will still have this of course. It would be a coincidence however (to which we shall refer later on) when the r new diffusing substances also had the same $O.A.$ on both sides already in (7). Even if this should not be the case for one of these r , the state of the equilibrium must change.

Let us imagine now that (4) is a Def. $P.Q.$ -equilibrium, so that the quantities m and m' which have not been indicated, are determined also. When the membrane now becomes permeable for Y also, (4) will not be in equilibrium any longer; then the substances W , X and Y will begin

diffusing in some direction or other, until at last a new equilibrium sets in in an other state; the composition and the quantities m and m' of the two liquids namely will then differ from those in (4).

This same phenomenon will repeat itself, when the membrane becomes permeable for Z besides.

Above we have said that it would be a coincidence when a non-diffusing substance had the same *O.A.* on both sides; in some cases, however, this is no coincidence at all any more.

Let us imagine e.g. that the membrane, as sub b , becomes less permeable for q diffusing substances, then it is clear that each of these q now non-diffusing substances, must have the same *O.A.* in the two liquids. When the membrane for some reason would become more permeable for one or more of these q substances, it is clear that the state of the equilibrium would not be changed hereby.

d. Now we suppose in the same way as above, sub 4, that the membrane becomes more permeable for s of the non-diffusing substances occurring only at the left side and for s' of the non-diffusing substances occurring only on the right side of the membrane. Without further explanation it will be clear that (7) now cannot be in equilibrium any longer, so that a new state must set in.

If namely we imagine that the membrane of (4) now also becomes permeable for U , then U will begin to diffuse towards the right; of course this also causes W and X to pass through the membrane in some direction or other, until at last a new equilibrium has set in again. The same phenomenon will repeat itself once more, when the membrane becomes permeable for V too. From *c* and *d* now follows:

B. when a membrane becomes more permeable, the state of the equilibrium will change; each of the changes in the permeability is followed by an osmosis until the new state has set in.

Attention should be paid here, however, to the coincidence, discussed sub *c*, when one of the non-diffusing substances occurring on both sides, becomes diffusing.

e. Now we imagine in the same way as above sub 5, that the membrane becomes m.l.-permeable. We now find that for this case the same obtains as has been discussed above in *B*.

When through the change in the permeability of its membrane an equilibrium passes into a new state, it may occur that the liquid on one of the sides of the membrane disappears entirely.

This is certainly the case when the membrane becomes permeable for all substances and the pressures P and P' are different. Previously namely (*E. Comm. I*) we have seen that a system with a membrane permeable for all substances, can be in equilibrium only when the two liquids have the same pressure and composition. Consequently the system cannot reach an equilibrium when the two pressures are different, so that all substances will

flow towards that side of the membrane where the pressure is smallest.

Let us take as an other example an equilibrium

$$L(d + \bar{X})_P | L'(d + \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})_{P'} \dots \dots \dots (9)$$

in which it depends upon the concentration of the non-diffusing substances whether P will be greater than P' yes or no.

When the membrane now becomes permeable for X , then

$$L_1(d + X)_P | L'(d + X + \bar{Y} + \bar{Z})_{P'} \dots \dots \dots (10)$$

forms, in which the two liquids will have an other composition than in (9). This system, however, can exist only when $P < P'$ (comp. *F Comm. I*).

If in (9) P should be $< P'$, then (10) is an equilibrium; if, however, in (9) P should be $> P'$, all liquids will diffuse from left to right; then a state

$$\times_P | L'_2(d + X + \bar{Y} + \bar{Z})_{P'} \dots \dots \dots (11)$$

forms in which the sign \times indicates that all liquids have disappeared here.

It is clear that a similar state can occur only, when the membrane becomes permeable for all substances of both or of one of the two liquids; in the latter case it is clear also that all liquids can gather only on that side of the membrane where the non-diffusing substances are found.

We now imagine that the membrane M of an equilibrium by z successive changes in its permeability passes into a membrane, which we shall call M_z ; the state R of this equilibrium then passes into an other state R_z .

Now one might believe that this state R_z would always be independent of the sequence of these z changes; this is not always the case, however. As a general consideration would lead us too far, I shall make this clear by a simple example only. For this purpose we take the equilibrium

$$L(W + X)_P | L'(W + X + \bar{Y})_{P'} \dots \dots \dots (12)$$

in which P always $< P'$. We now imagine two changes viz. the becoming impermeable for X and the becoming permeable for Y . We now distinguish two cases.

1. The membrane becomes impermeable first for X and afterwards permeable for Y . The first change causes (12) to pass into

$$L(W + \bar{X})_P | L'(W + \bar{X} + \bar{Y})_{P'} \dots \dots \dots (13)$$

in which of course L and L' still have the same composition as in (12). With the second change (13) passes into

$$L_2(W + \bar{X} + Y)_P | L'_2(W + \bar{X} + Y)_{P'} \dots \dots \dots (14)$$

in which W and Y are distributed in quite an other way as in (12).

2. The membrane of (12) first becomes permeable for Y and afterwards impermeable for X . The first change makes the membrane permeable

for all substances; because, as we have seen before, $P < P'$, now (12) passes into:

$$L_1(W + X + Y)_P | \times_{P'} \dots \dots \dots (15)$$

which further remains unchanged, when at the second change the membrane now becomes impermeable for X .

From this it appears that two similar changes in the permeability, but taken in a different sequence, may result in an other state. So we may say:

C. when a given equilibrium [viz. a Def. $P.Q.$ -equilibrium] passes through a series of states because of changes in its membrane, its final-state (and also intermediate states) may be dependent of the sequence of these changes.

We now suppose that by the changes in its membrane an equilibrium travels successively through the states

$$R \quad R_1 \quad R_2 \quad R_3 \dots R_z \dots \dots \dots (16)$$

In each of these states the equilibrium has a definite ζ , which we represent by $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_z$. As the ζ of a system containing a definite quantity of each of the substances, can only decrease or remain constant under constant pressure (and at constant temperature), it follows:

$$\zeta > \zeta_1 > \zeta_2 > \zeta_3 \dots > \zeta_z \dots \dots \dots (17)$$

in which, however, also two or more ζ 's following each other immediately, may be equal. E.g. ζ_2 can be $= \zeta_3$, but not e.g. $\zeta_2 = \zeta_5$, unless also $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \zeta_5$.

From this it follows that indeed two successive states e.g. R_2 and R_3 can be equal, but not e.g. R_2 and R_5 , unless R_2, R_3, R_4 and R_5 are equal; for this reason we shall consider them as one state. From these considerations it follows among other things:

D. when by a change in its membrane a given equilibrium has passed through a few states, it is not possible to alter the membrane in such a way that one of the states already passed through, can return once more.

E. when in a series of changes of a given equilibrium a state A preceeds a state B (between which one or more other states may or may not be situated), then in an other series of changes of this same equilibrium this state A never can follow B .

From these considerations other results can still be deduced: I leave this to the reader, however.

If we place one or more membranes against one another, then a new membrane arises, which I shall call a "combination-membrane". If e.g. we imagine

M_1	only permeable for	W, X, Y and Z
M_2	W, X and Z
M_3	W, Y and U

and when we bear in mind that a combination is only permeable for those substances, which can diffuse through each of the two membranes, then it is clear that the combination-membrane

$M_1 M_2$	will be permeable only for	W, X and Z
$M_1 M_3$	" " " " "	W and Y
$M_2 M_3$	" " " " "	W

and that the latter is also the case for the combination $M_1 M_2 M_3$.

From this it also appears that the permeability of a membrane by combining it with an other can decrease or remain equal, but that it never can increase.

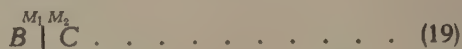
In the special case that two membranes are equipermable, their combination also is equipermable with both.

We now take the two osmotic equilibria



in which three arbitrary states, which have been called A , B and C . In the first, in which a membrane M_1 , state A is in equilibrium with B ; in the second, in which a membrane M_2 , state A is in equilibrium with C .

Now it is clear that the osmotic system



in which the combination-membrane $M_1 M_2$, will now be in equilibrium also.

If namely we imagine M_1 permeable for d_1 substances, then each of these d_1 substances must have the same $O.A.$ in states A and B ; when M_2 is permeable for d_2 substances, each of these d_2 substances must have the same $O.A.$ in states A and C . From this it follows that every substance which can diffuse as well through M_1 as through M_2 and consequently also through their combination $M_1 M_2$, must also have the same $O.A.$ in B and C , so that (19) is in equilibrium.

As (19) will still remain in equilibrium also, when we substitute the membrane $M_1 M_2$ by an equi- or less permeable membrane, it follows:

F . when each of the states B and C may be in equilibrium with an other state A , the states B and C will also be in osmotic equilibrium, at least, when the membrane is equi- or less permeable than the combination-membrane.

It is clear that we can here understand by "state" any arbitrary phase (liquid, gas or solid substance) and also a system of more phases (e.g. a solution + solid substance or a solution + solid substances + vapour, etc.) at least when these phases are in equilibrium among each other.

As a special case of F we have among other things:

G . when each of the states B and C can be in equilibrium with a state A with the aid of a membrane, permeable for water only, the states B and

C will be in equilibrium also, at least when this membrane is also permeable for water only.

If we apply the previous considerations to the equilibria

$$L(W + X + \bar{Y})_P | L'(W + X + \bar{Y} + \bar{Z})_{P'} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$L(W + X + \bar{Y})_P | L''(W + X + \bar{U})_{P''} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

then it follows that the osmotic system

$$L'(W + X + \bar{Y} + \bar{Z})_{P'} | L''(W + X + \bar{U})_{P''} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

will be in equilibrium also. This will still be the case when the membrane is permeable only for one of the two substances W and X ; this will no more be the case, however, when the membrane is permeable besides for one or more of the substances Y , Z or U .

We now take the two osmotic equilibria

$$(Water)_P | L'(W + n')_{P+\pi'} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$(Water)_P | L''(W + n'')_{P+\pi''} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

in which the liquids L' and L'' contain n' and n'' non-diffusing substances, which may or may not be different; from this it follows that the osmotic system:

$$L'(W + n')_{P+\pi'} | L''(W + n'')_{P+\pi''} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

shall also be in equilibrium now. This is no longer the case when the membrane is permeable besides for one or more of the other substances.

The osmotic pressure of liquid L' is π' , that of liquid L'' is π'' . It now appears from (25) that the two liquids are not in equilibrium under the pressure P , neither when each of the two liquids is found under its own osmotic pressure (π' and π''), but that these pressures must be $P + \pi'$ and $P + \pi''$.

If e.g. we have two diluted liquids L' and L'' , so that their osmotic pressure is small (e.g. $\pi' = 0.5$ and $\pi'' = 0.6$ atmosphere) and if we take, as usually is the case in determining osmotic pressure, $P = 1$ atmosphere, then the two liquids will be in equilibrium with one another under the pressures 1.5 and 1.6 atmosphere.

(To be continued.)

Leiden, Lab. of Inorg. Chemistry.

Chemistry. — *The Action of Per-Acetic Acid and Per-Benzoic Acid on the Unsaturate Aliphatic and on Aromatic Iodine Compounds.*
By J. BÖESEKEN and CH. SCHNEIDER.

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

It is known that in 1886 WILLGERODT discovered that the iodine bound to the aromatic C.-atom is easily chlorated to iodide dichloride, and that by the action of soda, these iodide chlorides are converted to iodoso compounds, which by oxido-reduction give rise to the formation of iodo-compounds and original iodine compound.

In 1892 (B. 25. 2632) V. MEIJER and WACHTER obtained the iodoso benzoic acid by direct oxidation of o. iodine benzoic acid¹⁾ with fuming nitric acid.

WILLGERODT obtained iodoso compounds with NaOBr B. 29, 1571 (1896) and BAMBERGER B. 33. 533 (1900) by direct oxidation with CARO's acid.

This last mode of preparation led us to the conclusion that these iodoso-compounds and iodo-compounds could be easily prepared both from the aromatic and from the aliphatic iodine-compounds by oxidation with organic per-acids, for also aliphatic iodoso compounds have been prepared by THIELE Ann. 369. 119 (1905), which he did by converting unsaturated iodine compounds as $\text{CHCl}=\text{CHI}$ with Cl_2 into the iodide chlorides, and decomposing these with soda.

The result of this investigation has quite answered our expectations, compounds could even be obtained, which were accessible by no other way.²⁾

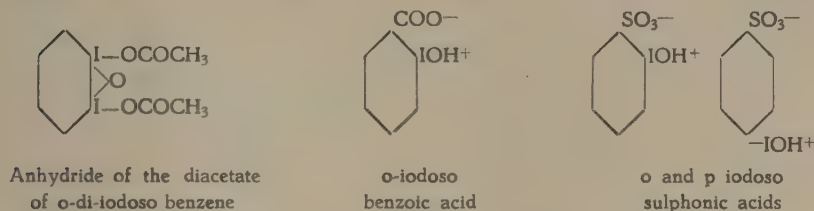
At first aromatic iodine compounds were oxidized with 8–10% solutions of per-acetic acid in acetic acid. Then the *diacetates of the iodoso-compounds* were formed, which were oxidized no further under these circumstances. In this way were obtained the diacetates of iodoso

¹⁾ Iodine-benzoic acid = $\text{IC}_6\text{H}_4\text{COOH}$; iodo-benzoic acid = $\text{IO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{COOH}$

²⁾ As our first communication on this subject in the meantime has been supplemented by new facts, and the insight into this reaction has undergone considerable modification, we have thought it advisable to publish it not as an addition to this communication, but independent of it as a paper by itself.

benzene, *o*-iodoso toluene, *o*-nitro-iodoso benzene, *m*-nitro-iodoso benzene, *p*-iodoso benzoic acid, and tetracetate of *m*-di iodoso benzene.

Further a diacetate of the *o*-di iodoso-benzene anhydride was formed from *o*-di iodine benzene, to which, on the strength of the analysis values and the properties the following constitution was assigned:



The *o*-iodine benzoic acid, the *o*-iodine benzene sulphonic acid and *p*-iodine sulphonic acid gave the corresponding iodoso acid, to which we give the dipole formulae; the last compound was not known, attempts to prepare it by another method, had failed.

With *per*-benzoic acid in *chloroform* the *iodo*-compounds were directly obtained, except with *o*-iodine-benzoic acid and *o*-iodine benzene sulphonic acid.

At first we thought that we had to ascribe this difference to the nature of the oxidizer; when it, however, appeared that *o*-di iodine benzene formed, besides the di-iodoso acetate anhydride mentioned before, also a little di iodo compound, and ARBUSON and MICHAILOW (J. pr. Ch. 127. 92) had found that the different behaviour of *per*-acetic and *per*-benzoic acid towards the double bond had to be attributed to the different solvent, we have oxidized iodine benzene for one part with a higher percentage of *per*-acetic acid in *chloroform*, for another part with *per*-benzoic acid in *glacial acetic acid*, and obtained a mixture of iodoso- and iodo benzene in both cases (J. pr. Ch. 131, p. 285, 1931). The stopping of the oxidation with diluted *per*-acetic acid in *glacial acetic acid* as the iodoso compound is formed must therefore be attributed to the acid solvent, which binds the iodoso base; as a salt the further oxidation is evidently hampered.

As the iodoso acids can also be considered as internal salts (the reason why we assign the dipole formula to them), the stopping of the oxidation is comprehensible.

By making use of high-percentage *per*-acetic acid, through which the acetic acid concentration is diminished, the oxidation can proceed in most cases, on the other hand by adding acetic acid to the *chloroformic* solution, the further formation of *iodo*-compounds can be impeded.

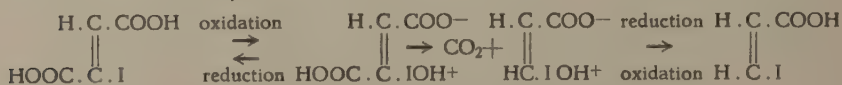
The use of high-percentage *per*-acetic acid had, besides, the advantage that some compounds, as *m*-iodoso benzene sulphonic acid, could be obtained, the preparation of which had not yet succeeded by any other way.

Oxidation of aliphatic iodine compounds.

THIELE's observation (loc. cit.) that only those compounds which had the iodine atom situated at an ethylene bond, could be converted into iodoso and iodo compounds, we could confirm by means of this direct oxidation.

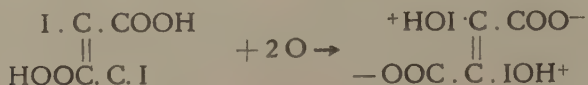
Iodoform gave a strong separation of iodine, which element was further oxidized to I_2O_5 . C_2I_2 gave C_2I_4 , neither of them an iodine oxygen compound. $C_2H_2I_2$ gave, on the other hand, with per-benzoic acid and with per-acetic acid, a white highly explosive compound with 17.7% active oxygen; probably this is *di-iodoethylene* (calculated 18.6% active oxygen).

Oxidation of iodine fumaric acid; THIELE did not succeed in preparing the iodide chloride from this; with 70% per-acetic acid we obtained *iodoso fumaric acid*, which with SO_2 rendered back the original iodine fumaric acid. Boiled in water CO_2 splits off, and it passes into *iodoso acrylic acid*. Since by careful reduction with SO_2 this compound can be converted into *iodine acrylic acid* of melting point 65° (See STOLZ B. 19, 542 (1886)), the succession of the reactions may be represented thus:



Really on oxidation with per-acetic acid this iodine acrylic acid yielded an iodoso-acrylic acid, which proves at the same time that the low-melting acid obtained by STOLZ with conc. HI from propiolic acid is the β -*cis*-iodine acrylic acid; a WALDEN reversal is not to be expected in this oxidation.

The di-iodine fumaric acid took up two active oxygen atoms; hence an iodine-iodo- or a di-iodoso fumaric acid may have been formed. Seeing that on boiling with H_2O the compound did not split off CO_2 , the latter supposition is the more probable one; for it is to be expected that on passing into the dipole state the CO_2 group becomes stable.



From an electric point of view this substance is very interesting, on account of internal compensation it will probably show no dipole effect.

The di-iodine stilbene was *not* oxidized by per-acetic acid in acetic acid solution; in chloroform solution a remarkable conversion set in.

With separation of iodine the di-chloro stilbene oxide $C_6H_5 \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{C} - \text{C} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{Cl} \quad \text{Cl} \end{array} C_6H_5$ was obtained, an interesting example of the active part of the solvent.

In conclusion we will give a survey of the melting-points and points of decomposition of the compounds obtained:

Iodoso benzene diacetate	Mp. = 157°
Iodo benzene	Explosion p. = 211°
o-Iodo toluene	" = 212°
p-Iodo toluene	" = 230°
o-Iodoso nitrobenzene diacetate	Mp. = 146°
Iodo-nitrobenzene	= 214°
m-Iodoso nitrobenzene diacetate	Mp. = 150°
m-Iodo nitrobenzene	Expl. p. = 218°
o-Iodoso benzoic acid	Mp. = 168°
p-Iodo-benzoic acid	Expl. p. = 220°
o-Iodoso benzene sulfonic acid	Expl. p. = 196°
m- " " " " "	= 139°
p- " " " " "	= 158°

*Laboratory for Org. Chemistry
of the Technical University.*

Delft, October 1932.

*Physics. — The Gravity Expedition of Hr. Ms. O 13 in the Atlantic.
By Prof. F. A. VENING MEINESZ.*

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

During the past summer, the Dutch Navy has again been willing to promote an expedition for determining gravity at sea; for one month and a half His Exc. the Minister of the Navy, Mr. DECKERS, has allotted a submarine for an investigation in the Atlantic. Sincere thanks are due to the Navy for this important contribution to science and likewise to the Netherlands Geodetic Commission, President Prof. Dr. J. A. A. MULLER, under whose auspices the expedition has taken place.

The object of the expedition was to investigate especially those parts of the Atlantic, where the frequency of earthquakes proves the tectonic activity of the Earth's crust, in order to be able to compare the gravity field with the fields found in other seismic regions, e. g. the East Indies and the West Indies. This would provide a base for attacking the problem of the nature of the tectonic phenomenon taking place in the Atlantic and whether it is of the same kind as what is going on in the geosynclinal areas in those other regions.

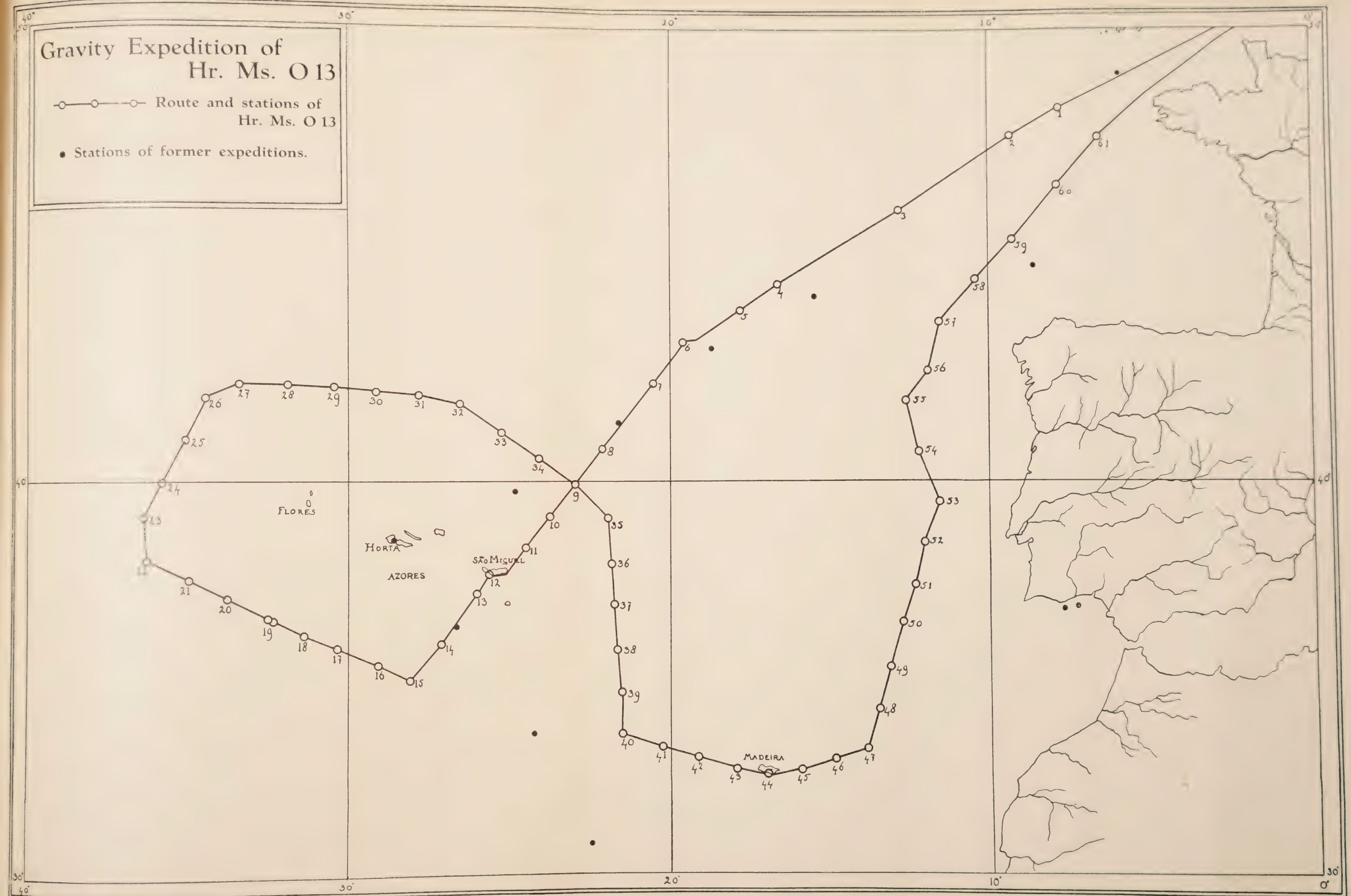
In 1926, a great many data were already obtained in the Atlantic by the expedition of Hr. Ms. K 13, but most of the stations of this trip are at a distance of about two hundred miles from each other. Con-

sidering the results of the research of the last years in the Indies, where strips of strong negative anomalies of a width of some fifty or hundred miles were discovered, this distance is too great for our purpose. It would have been possible that we had skipped a strip like that without noticing it. It was therefore necessary to put the stations of the new expedition at a smaller distance; they have never been further apart than 60—75 miles.

As TAMS has shown a few years ago, most of the earthquake centres in the Atlantic are concentrated in a strip over the Mid-Atlantic Ridge, and so the programme of the trip was projected in such a way that two profiles were made perpendicular to the trend of the ridge, one to the south-west of the Azores and one to the north of these islands. Besides this strip another strip deserved attention, i.e. that which relies Gibraltar with the Azores, because some geologists think it likely that the Alpine geosyncline continues through the Atlantic in this direction and there is no doubt that at least the eastern part of this strip is seismically active. Three profiles were projected across it, two between the Azores and Madeira and one east of Madeira. As it would be possible that this strip should prove to continue from the Azores towards New Foundland, a profile west of the Azores was also made. Lastly it was resolved to make a continuous series of stations on the return route from Madeira to the Channel; this series would show whether the gravity field of the European continent continues in the ocean or whether the field is markedly different. This might provide us with interesting suggestions about the problem whether the ocean floor reacts similarly or differently on eventual tectonic forces. On the European shelf at the end of the Channel a pair of stations were observed during the beginning of the trip and likewise a pair on our return; both pairs consisting of a station on the edge of the shelf and a station over the foot of the continental slope. The combination of all these considerations has led to the route and the stations, that are represented on the accompanying map.

The O 13, a submarine of about 700 tons, left the naval base Helder on July 5, Lieut. P. ROJWENHORST commanding and the staff of the ship consisting of the officers G. KOUDYS, A. J. KROM and W. J. HOOTSEN. Our first trip to Punta Delgada on the island of São Miguel took us eight days and we submerged fourteen times for making gravity observations. Three of these stations don't belong to the Atlantic programme; they were made during the first day for finishing a gravity survey of the Southern part of the North Sea, which falls outside the scope of this paper.

After stopping five days at Punta Delgada we left for our second leg towards Madeira, where we arrived on July 31. This trip of twelve days was our longest one; it included thirty-one dives for gravity stations. A well deserved rest of five days was followed by our last trip of nine days to Holland, during which we dived seventeen times. With



two stations in the harbours of Punta Delgada and Funchal this makes a total of 61 gravity stations in the Atlantic.

During the whole voyage we had good weather, but still it was a strenuous expedition because of the excessive number of dives and the long stretches at sea without interruption. No night was undisturbed and occasionally it was interrupted twice by submergings. I feel sincerely indebted to Lieut. ROUWENHORST for his helpful assistance and for the trouble he took for the investigations and the same is true with regard to the other officers of the ship.

The gravity observations were made in the normal way with the same apparatus used on former occasions. A description is found in "Theory and Practice of Pendulum Observations at Sea", published by the Netherlands Geodetic Commission. Besides these principal observations, soundings were also made, but as they had to be made by the sonic method and as this appeared impossible while the ship was at the surface of the sea because of the wave-noises in the microphones, we had to confine them to the duration of the submergings. In order to get at least some information about the topography of the sea-floor in the neighbourhood of the stations, the soundings were already begun half an hour or more before the beginning of the gravity observations and they were continued over a similar time after the observations were finished. This made it necessary to submerge each time about two hours. During submergence the reception of the echo gave no trouble.

On two occasions the soundings gave deviations from the existing charts. First the small trough, indicated at $43^{\circ} 10'$ N. Lat. and $19^{\circ} 50'$ W. Long. could not be found and in view of the great number of soundings in the neighbourhood it seems unlikely that it exists. Secondly a ridge was found to the S. W. of the island of Flores, which is not given by the maps.

The gravity observations have been computed provisionally and so it is possible to give already an idea about the results. A final discussion of the results will have to wait till the computations have been finished in detail.

Two important conclusions can already be given with certainty. In the first place no trace was found of strips of strong negative anomalies like those that exist in the East Indies and the West Indies over the seismic parts of the crust. This provides us with a strong indication that the deformations of the crust in the Atlantic have another character than those in the geosynclinal areas. This confirms the seismic indications; in general the Atlantic earthquakes, although world-wide, have not the same intensity as those in the East and West Indies. The gravity field is not quite undisturbed over the Mid-Atlantic ridge or over the seismic areas west of the Iberian Peninsula, but the disturbances are smaller and it is necessary to await the final reductions before they can be discussed.

The second important conclusion is that all the stations of this expe-

dition, with the exception of three near the English Channel, show positive anomalies, ranging from a few milligal to about 90 milligal; the mean value is about 40 to 50 milligal. This positive field begins already near the continental shelf; the two profiles from the shelf towards the Atlantic, made at the end of the English Channel, give the following provisional values for the anomalies after isostatic reduction

Nr.	1st profile Anomaly	Nr.	2nd profile Anomaly	
1	— 65 milligal	61	— 57 milligal	On the shelf
2	— 15 ..	60	+ 45 ..	Deep water
3	+ 72 ..	59	+ 54 ..	Deep water

It is difficult to get at the meaning of this extensive field of positive anomalies. There is no doubt that it is a real deviation from isostatic equilibrium, because it can easily be proved that the mean anomaly over a great area is only dependent on the total amount of mass in the upper layers of the Earth over this area and that it does not depend on the way in which the masses are distributed. A wrong assumption regarding the distribution of the isostatic compensation in the Earth's crust may affect the details of the gravity field, but it has no effect on the mean value of the anomalies.

What can be the cause of a wide-spread deviation of equilibrium in the earth? We are certainly not yet in a position, which allows us to give a well-founded answer on this question. The following considerations have no further pretension than to give a tentative suggestion, which may serve as working hypothesis as long as no other facts go against it.

Under this reservation I wish to point out that as far as I can see it, there is only one explanation, which may account for it as a stable situation. This explanation assumes the earth's crust to be able to transmit forces over its whole extent, i. e. also over the oceanic parts. It supposes the crust to be subject to lateral compression and it assumes that the stresses are differing for different areas; in the Atlantic strong compression is assumed. Difference of stress in the crust is easily explicable; it may for instance come into being, when the outer layers of the Earth are cooling and when the temperature coefficient or the compressibility for those areas are different.

The consequences of lateral compression in the crust have been discussed in a former paper, "Maritime Gravity Survey in the Netherlands East Indies", Proc. Vol. XXXIII, N^o. 6, 1930. If the excess of pressure per unit of vertical cross-section is d , the condition of equilibrium of the crust shows that the crust is subject to an excess of upward force per surface unit of

$$\frac{hd}{R}$$

R indicating the Earth's radius and h the thickness of the crust.

This corresponds to more mass than what equilibrium brings about elsewhere and it is shown that this excess of mass gives an attraction at the Earth's surface of

$$A = \frac{3 g h d}{2 R^2 \varrho_e}$$

in which ϱ_e represents the mean density of the Earth. Substituting for R and for ϱ_e their values, we find

$$A = 6.7 \cdot 10^{-5} h d \text{ milligal}$$

in which d is expressed in Kg/cm^2 and h in Km.

In case the crust is subject to an excess of lateral pressure d in all directions, the excess of mass and the corresponding attraction A is double this amount. For a crust of a thickness of 30 Km and an anomaly of 40 milligal we find in this case an excess of pressure of 10 000 Kg/cm^2 .

There is no doubt that this value is much more than what is commonly supposed to be the limit of strength of the materials of the crust. We must however consider the following points.

In the first place the earthquakes make it probable that the crust gives way in some places to the strain to which it is subjected. Secondly the materials of the crust at some depth are also subject to the vertical pressure exerted by the layers above and it is well-known that equal stress in all directions does not give the same risk as differences of stress; probably the materials can stand an enormous amount in this case. In this connection it may be pointed out that at a depth of about 30 km the vertical stress caused by the weight of the layers above does also amount to 10.000 kg/cm^2 . Further consideration will therefore be necessary before we reject the hypothesis on this account.

The advantages of the hypothesis are the following. First it is able to account for the positive anomalies over great extensions of the crust as a stable situation, while other assumptions must look at it as a temporary phenomenon, which is doomed to disappear. As we know from the gravity values found in great river deltas, as e. g. the Mississippi delta, how quickly extra loads on the crust are counteracted by isostatic readjustment of the crust and as the same conclusion about quick readjustment of the crust is suggested by the areas in the North of Europe and of America, where a great ice-load has quickly disappeared at the end of the last ice-age and where the gravity field is only slightly lagging behind, an explanation of isostatic anomalies as a temporary disturbance of equilibrium presents great difficulties. It compels us to assume a phenomenon that is still going on, working so quickly that the lag of readjustment of the crust allows isostatic anomalies of 40 milligal. Geologically speaking this means a great speed of action. To

assume such phenomena over areas as big as that which is under consideration, seems to me a great difficulty.

Another consideration in favour of the above hypothesis is the fact that extensive fields of positive anomalies have also been found in the East and West Indies to both sides of the strips of negative anomalies, which have been mentioned. Although these strips reduce the mean anomaly over the whole region, there appears to be no doubt that this mean anomaly is still positive. In these instances the assumption of lateral compression in the crust is supported by numerous other indications; I may only mention in this respect the geological data, which all point to folding and overthrusting in these areas.

Another part of the above hypothesis also finds support in the gravity field in the East Indies, i. e. the assumption that the sea-floor is likewise able to transmit lateral stresses. This is strongly suggested by the fact that apparently the tectonic phenomenon is just as strong where the Archipelago is bordering on the Indian and Pacific Oceans as where it is bounded by the Australian shelf; the strip of negative anomalies does not show any systematic differences in intensity between those parts.

Studying the provisional results of the last expedition, I get an impression which would likewise support this last point. It seems to me that there is a certain continuity of the gravity fields in the Iberian Peninsula and in the Atlantic Ocean and this would certainly suggest a similar way of reacting on tectonic action, implying the same capacity to transmit forces. This impression, however, has to be confirmed by the final results before any conclusions may be built on it.

Also in other regards, further discussions about this expedition will have to be deferred till those results are available. I wish to mention here only one more group of results, i. e. those that have been found near the islands. During the expedition of the K XIII in 1926 a value of the isostatic anomaly was obtained at the island of Horta (Azores) of + 10 milligal, i. e. considerably less than at the neighbouring stations, where anomalies of + 54 and + 70 milligal were found. The present expedition gave a similar result near the island of São Miguel; the provisional computation of the stations Nrs. 10—14 gave

Nr.	Isostatic Anomaly	
10	+ 56 milligal	
11	+ 21 "	
12	+ 12 "	(São Miguel)
13	+ 5 "	
14	+ 55 "	

It is interesting to notice that the decrease of the anomaly is not limited to the station of Punta Delgada on São Miguel, but that it comprehends likewise the stations Nrs. 11 and 13, although these stations are both on deep water.

I don't wish to make an attempt at explanation of these curious results before the final computations give a satisfactory base for it. They are certainly contrary to all former opinions that volcanic islands present excesses of gravity because of the heavy material of which they are built.

On Madeira an excess was found, which also extends over a greater area than the island. The provisional results of the stations Nrs. 41—46 are

Nr.	Isostatic Anomaly	
41	+ 29 milligal	
42	+ 63 ..	
43	+ 81 ..	
44	+ 72 ..	(Madeira)
45	+ 25 ..	
46	+ 34 ..	

In this connection the results found in 1926 near the Canarian Islands may be mentioned. In Las Palmas, on the island of Gran Canaria, the isostatic anomaly was + 83 milligal, but near the island of Teneriffe, at sea, a value was found of + 11 milligal. The neighbouring stations gave anomalies of + 4 and + 42 milligal. With the exception of the low value near Teneriffe these results as well as those near Madeira are in harmony with the old conception of positive anomalies on volcanic islands.

Geology. — *Some additional notes on the Permo-Carboniferous Orogeny in North America.* By W. A. J. M. VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT.

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

Professor CHARLES SCHUCHERT (Yale) has published a review in *Amer. Journal of Science*, July 1932, *Scientific Intelligence*, (pp. 88—89) of my treatise on the Permo-Carboniferous Orogeny in the South-Central United States, as appeared in the *Verhandelingen* (Vol. 27, No. 3, 1931). A shorter account with the same title was published in the *Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists* (Vol. 15, pp. 991—1058) 1931.

SCHUCHERT rightly asks "*is this orogeny really so tremendous*"?

This is indeed the great question; we may theorize about it, but, unfortunately, we can scarcely expect a decisive answer, for a considerable time to come at least. I need not repeat here the several points of my argument, taken from features of the mountains as well as of the foreland, in constant comparison with what we know of the front of the great Permo-Carboniferous system of Europe. Here in Europe the heart of the mountains, happily, is fairly well exposed to investigation, with ever more remarkable results as to the truly tremendous dimensions of the orogeny on this side of the Atlantic. In the United States the interior chains and the hinterland are buried under the very thick blanket of the Gulf Coast Tertiary and Cretaceous, and I fear beyond hope of much further discovery in the Gulf Plain. The mother stratum of the salt domes in the Houston district, on the basis of geophysical data, must lie at a depth of at least 15000 feet, and more probably 20000 feet. The drill has only been able to tell us that at Sulphur La. the basis of the salt dome is much deeper than 9200 feet (BARTON). Consequently, our only hope to learn something about the Paleozoic basement of this area is geophysical speculation. D. C. BARTON has recently communicated a synopsis of our data on this subject at the 13th Annual Meeting of the American Geophysical Union (Report General Assembly National Research Council, Washington, April 29, 1932). It appears that the salt domes of the coastal group lie in a broad areal trough of gravity minima, which is especially sharp in Louisiana and whose axis coincides with the southern Louisiana salt dome line between Lake Charles and Crowley, and runs approximately across the Vinton-Lockport-Iowa-Welsh-Roanoke-Jennings salt domes. Unfortunately, it is by no means certain what this low gravity zone really means. Following BARTON, I may mention four alternatives:

1. It may be wholly the effect of a deposit of low density rocksalt, the mother stratum of the salt domes;
2. It may be the effect of a synclinal trough, in which a salt lens lies axially and is arched up convexly into a salt ridge, or merely the axial zone of a thick elongated salt lens;
3. It may be the combination of (a) a seaward increase in thickness of the sediments and the dip of the basement on which they rest, and (b) the regional increase of gravity in the Gulf sea basin (of still obscure origin, but probably connected with a thinning of the lighter outer crust and relative shallow depth of dense subcrustal elements). The greatest thickness of sediments does not coincide with the axis of the gravity minimum; the former lies at or off the coast;
4. In the combination may enter a western prolongation of BOWIE's area of negative isostatic anomaly, which more or less coincides with the Appalachian trough, involving a westward curvature of this trough, whilst to the south of the Louisiana-Texas negative zone would follow a pro-

longation of BOWIE's area of positive anomaly, which more or less coincides with the Appalachian Piedmont belt.

If this last interpretation of part of the anomalous effect holds true, it might be an indication of the *general* WSW trend of the Permo-Carboniferous mountains under the Gulf coastal sedimentary blanket, apart from northward lobes of the outer front of the orogeny, so particularly conspicuous in the Ouachita Mountains proper.

The only chance, and I believe a fairly good one, to find *outcrops* of the interior structure exists in Chihuahua and Sonora and in uplifts in the sierras of Coahuila. We know of an outcrop of Paleozoics at Torreón, on the border of the state of Durango (Permian), and even as far to the southeast as near Victoria in Tamaulipas (Mississippian and Permo-Carboniferous). Unfortunately outcrops will probably be confined to small uplifts in the Tertiary folds, but yet they may give valuable evidence if we hit as lucky a spot as at Marathon or Solitario.

For the present, therefore, our data as to the interior zones of the greater Ouachita complex are extremely meager. If, however, it is truly a major world-orogeny, and, as I conceive it, encircling the southern rim of the Paleozoic continental mass of North America, and not a more or less local affair, it should be possible to find some traces of *the continuation of these chains farther west*. Here, unfortunately, we again enter very little worked territory, particularly in northwestern Mexico, and moreover the Paleozoic picture becomes very much obscured by the great sequence of Mesozoic and Tertiary revolutions which affect the Pacific side of the continent, and are almost continuous from Jurassic time to the present period. The Andine (late Jurassic) orogeny in particular has profoundly changed the sediments by regional metamorphism, aggravated by tremendous intrusions of batholiths.

Last winter, when I had an opportunity to revisit the United States, I gave some attention to possible indications of the late-Paleozoic orogeny west of the Cordilleran front and discussed the problem with such geologists as N. H. DARTON, D. F. HEWETT, R. T. HILL, P. B. KING and W. S. BURBANK, who kindly gave me the benefit of their extensive knowledge of these but imperfectly explored vast regions.

The foreland chain of the Wichita-Amarillo Mountains does not stop dead at the front of the Sangre de Cristo range, but, evidently, the WNW-trend continues farther to the northwest and is traceable as far as western Utah. Even as far to the northwest as the Columbia Plateau of Oregon, E-W ridges of Paleozoics emerge, crossed by the N-S Tertiary trends (E. L. PACKARD, *Am. Journ. of Science*, Vol. 15, 1928, p. 221). All these, however, are remodelled by Tertiary orogeny.

The general region of Arizona, New Mexico, Colorado and Utah is

dominated by a great positive mass, active through all geologic history. This Colorado Plateau is composed of two separate major elements: the Front Range block and the Uncompahgre Massif. They are separated by a marked zone of weakness, into which the Tertiary folds of the Sangre de Cristo system swing conspicuously. These folds at first constitute the west front of the Colorado Massif in northern New Mexico and southern Colorado, and then, just south of the Arkansas River canyon, swing to the northwest in between the two blocks. These folds, revived by Tertiary diastrophism, continue in the Uintah Mountains, are crossfolded by the N—S Wasatch Range, but reappear beyond the Salt Lake Valley of Utah and are traceable in the same E—W trend as far as the Nevada border. A system of minor warpings of WNW trend traverses the entire region. It may be very difficult to work out the Paleozoic structure underlying the Laramide and the late-Tertiary orogenies. The uplift has been so considerable that Pennsylvanian and often Permian directly repose on the pre-Cambrian; the later-Tertiary uplifts have added large areas of exposed pre-Cambrian floor, having caused the erosion of the entire remaining blanket of Paleozoic sediments. The enormous conglomerates in the Pennsylvanian, however, are ample proof of the importance of late-Paleozoic orogeny; the Permian rests unconformably on different Pennsylvanian horizons and becomes increasingly clastic towards the pre-Permian land-masses. The Arbuckle phase of the latest Pennsylvanian is conspicuously indicated, notably for the Sangre de Cristo system, but other locations in the Colorado Massif and the Front Range block give evidence of the earlier-Pennsylvanian Wichita phase.

The Wasatch Range shows strong overthrusting towards the east in Tertiary time, (but also Mesozoic diastrophism): it constitutes the eastern edge of the great Cordilleran Paleozoic geosyncline. Already in the Uintah Mountains the Paleozoics are largely in limestone facies. The swing of the folds would seem to indicate a NE-ward lateral displacement of the entire Colorado (Uncompahgre) Massif, not participated in by the Front Range block, at least not much after the Wichita phase in the early Pennsylvanian.

All the above described orogeny, however, is movement of a foreland type, similar to the orogeny in the Wichita and Amarillo Mountains and very distinct from the Ouachita type of mountain structure.

Along the southern and southwestern side of the Colorado Massif in Arizona and southern New Mexico another system of post-Laramide, late-Tertiary folds, partly overthrust, of the Sierra Madre system (after R. T. HILL) indicate a renewed push from the southwest, which, this time, did not again displace the Colorado buttress. These folds continue from southern Nevada to Tamaulipas. This orogeny is of Pliocene age in its major phases.

The main (outer) Ouachita system.

To the southwest the Paleozoic chains of the Ouachita system of the

Marathon Mountains are lost under the Sierra Madre folds of the Mount Ord and Santiago ranges; they once more crop out in the small isolated dome of the Solitario. In both these erosional windows they are most vigorous (nappe-overthrusts) and the facies of the older Paleozoics remains of the same geosynclinal type.

What becomes of the Paleozoic mountains farther west?

At first they are lost under the practically unknown Tertiary mountain folds of Chihuahua and Sonora, but here more erosional windows may be expected on the uplifts.

In the southwestern desert province of Arizona, the Altar district of northwestern Sonora, the Mohave desert, and the cross ranges of southern California, *we again find indications of a Paleozoic geosyncline, which may exist not far distant to the south.* This syncline is not identical with the old-Paleozoic Cordilleran geosyncline. In Nevada the Paleozoics do not yet belong to the Cordilleran geosynclinal province proper, but they already begin to thicken rapidly toward the west, a process apparently accelerated by the great crustal shortening in this region; they thicken from 400 to 12000 feet in this area, mostly in the Cambrian section. The sedimentation seems interrupted in the Silurian.

However, the highly metamorphosed sediments of southwestern Arizona, to the southwest of the northern mountain region of the state, are again more shaly than the limestone facies of the Plateau. The rocks are now marbles, interstratified with shists, some quartzites, and pierced by monzonite-granite intrusives. Sparse fossils indicate Pennsylvanian and Permian (Kaibab fauna) in this sequence. Marine Trias is reported from the Altar district in Sonora. Thick Paleozoic sections have also been reported from Sonora, but no study has yet been made of the area. In the Mohave desert ranges of California we also find highly metamorphosed Paleozoics. J. B. TENNEY believes the orogeny to be lower Triassic.

In Arizona the younger formations seem to overlap progressively on the southwestern pre-Cambrian edge of the Colorado Plateau. Strong plication is post-Kaibab. The conglomerates in the Triassic Shinarump and Chinle formations are derived from a southern source and indicate elevated (and wooded) highlands in that direction, subject to erosion in early Triassic time. The metamorphism and plication, however, must be accepted with caution, because the only visible outcrops are in island mountains piercing the recent desert filling. It is just possible that both are caused by and restricted to monzonite intrusions, and that now only these hardened areas stand out of the relief.

In the Mountain Region of northern Arizona conditions are strikingly different: there is no pre-Tertiary folding and no evidence of geosynclinal conditions. We are well on the interior Plateau. The widespread Paleozoic sediments are irregularly deposited, in Plateau facies, and not metamorphosed. In the Catalina Mountains, at Roosevelt Lake, Globe, Ray, the pre-Cambrian is covered by upper-Devonian, Mississippian and Penn-

sylvanian. In the southeastern corner of Arizona, at Bisbee, these aggregate 5000 feet. In the Chiricahua Mountains on the border of New Mexico the section includes Permian. Unconformities are in evidence at the base of the Monkoepi (Trias) and at the base of the Pennsylvanian.

All this suggests that in southwestern Arizona we might be again near the edge of the Paleozoic continent of North America against the marginal geosyncline, and on the front of an arcuate chain of folded and metamorphosed Paleozoics in geosynclinal facies. If this is true, this southern metamorphosed zone might well be a western prolongation of the Ouachita geosyncline of Marathon, now turning west and northwest along the southwestern rim of the continental mass, possibly forming another plateau-ward lobe, with its apex in southwestern Arizona and southern California. We may find evidence in the sedimentation of an outer Pennsylvanian-Permian foredeep belt, affected by a very late-Paleozoic, perhaps early Triassic diastrophism (cf. Bissett phase of the Glass Mountains at Marathon). The Paleozoic trends are of course crossfolded and deformed by the Tertiary Pacific trends. In southern California, particularly, the Ventura-Santa Barbara cross ranges (largely controlled by faults) are highly suggestive of the older E—W trend. A continuation of this feature is even indicated in the regional relief of the bottom of the Pacific Ocean, far out from the coast and continuing beyond the inner shelf. This suggests that we witness a *major* accident in the earth's crust.

In Nevada and southeastern California there is vigorous later thrusting to the east and northeast, in two cycles: Laramide (Paleocene) and post-Miocene. Some of the Laramide thrusts represent real nappes with many outliers. They are arcuate to the northeast, very complicated and connected with normal faults of great throw and general N—S to NW trend. The thrustzone extends all along the southeastern state line of California. The Paleozoics are thrust on Kaibab and Monkoepi; they are *non-metamorphic* and comprise Cambrian, Devonian, Mississippian and Pennsylvanian; pre-Cambrian is also involved. In eastern San Bernardino county the thrusts become lost against the great intrusive batholith of early-Tertiary monzonite. In the Providence Mountains the Paleozoics are still non-metamorphic: we must still be north of the metamorphosed zone. In the western portion of this area the Trias is non-red, in Pacific facies, very distinct from the red facies of the Monkoepi of Arizona and most of Nevada (D. F. HEWETT). Very little is known of the Paleozoics in the transverse ranges of southern California. The very few known fossils are Carboniferous. The shists may be in part Paleozoic (DARTON).

In the Sierra Nevada unit the highly metamorphic Paleozoic Calaveras formation is considered Carboniferous. From the very thick slates of the Blue Canyon formation Mississippian fossils are reported. Indications exist that the major Jurassic revolution is preceded by an earlier metamorphism and by two Paleozoic phases, at the top and again lower down in the Calaveras sequence (cf. FERGUSON & GANNETT, U.S. Geol. Survey Prof.

Paper N^o. 172, 1932). These may represent the Arbuckle and Wichita phases.

The above very brief analysis of conditions found in the extreme Southwest does not *prove* anything so far, but nevertheless contains some suggestive elements: there are indications of late-Paleozoic diastrophism, of E—W old trends, and of a metamorphosed zone of geosynclinal deposition to the south and southwest of plateau conditions in Arizona and Nevada. Everything is much obscured by the strong Jurassic, Paleocene and Tertiary orogenies of the Pacific province and much further study, here and in Mexico, will be needed before any more definite conclusions may be drawn. Progress with similarly difficult work in the eastern Alps of Austria has proven that it is possible to unravel such older events, even in the midst of most intense later orogenies. If my guess is right, that we may consider the area in the Southwest as the westernmost prolongation of the Ouachita zone, this would support my conception that this orogeny is in reality "tremendous", and may be considered on a par with the enormous bundles of late-Paleozoic folds which, east of the Atlantic, are such an important element of the skeleton of the present continent of Eurasia, to the south of the older-Paleozoic and Archaic-Proterozoic nuclei. As the Alpine orogeny is recognized to encircle the globe in both hemispheres, the Permo-Carboniferous orogeny would do the same. This is to be expected, since here in Europe there is much evidence that the late-Paleozoic orogeny was certainly not less important than the Tertiary Alpine revolution, probably more so. Where these former enormously wide and complex chains are known to encompass half the world, it would be curious if in the western hemisphere they should be confined to a few smaller orogenies of only local significance.

Geology. — *Remarks on the undation-theory of VAN BEMMELEN.* By PH. H. KUENEN. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

In a series of publications VAN BEMMELEN has suggested a number of important alterations in the oscillation-theory of HAARMANN. Excellent illustrations help to render his opinion clear. A brief summary of the undation-theory is as follows.

Crystallisation in the undifferentiated salsima is the cause of differentiation in a lighter sal floating on a heavier sima. These parts are in isostatic equilibrium with the undifferentiated salsima round about them, but not in hydrostatic equilibrium. The salsima shows a greater hydrostatic pressure except at the surface and at the base. Therefore it will be pressed in

between the sal and the sima. The former will be born upwards, the latter will flow in the direction of the salsima, at its base. The elevation is a "geotumor", the hollow above the disappearing salsima is a deepsea trough. The upper strata of the geotumor slide down into the trough. The tumor flows outwards as the consequence of movements to regain isostatic equilibrium. At the same time it is propagated towards the deepsea trough in the shape of a wave.

This movement causes the overthrust sheets of Alpine mountain chains to be piled up, without the necessity of assuming abnormal heights for the geotumor. At the same time the excess of hydrostatic pressure causes the rocks to flow in the same direction in the zone of plastic deformation. The propagation of the tumor is caused by crystallisation and differentiation in the salsima under the trough. This crystallisation in turn follows the decrease in pressure consequent on the disappearance of matter in the direction of the original zone of differentiation. For details and a more complete argumentation the reader is referred to the publications of v. B. There one can also learn how the occurrence of all manner of accompanying phenomena as earthquakes, isostatic anomalies, sequence of magma production etc., are ingeniously brought to bear upon the main line of thought.

In the following I wish to offer a few objections that occurred to me, when considering this highly original hypothesis.

The causes of the primary tectonic movements. According to v. B. the chief cause is movements to regain hydrostatic equilibrium, after the disturbance brought about by differentiation. This differentiation is the consequence of crystallisation in the salsima. In my opinion the latter assumption is very bold. It is true, that petrology teaches us that crystallisation in large magma basins results in differentiation: the crystals first formed sink (or float) out of the remaining liquid. But this sinking under the influence of gravity is only possible in a liquid with sufficiently low viscosity. Nothing seems to oppose the notion, that the magma in the batholites was sufficiently fluid. In all likelihood these reservoirs were not able to propagate transversal earthquake waves. It is very unlikely, that a highly liquid magma follows the entire length of an orogenetic belt reaching down several dozens of kilometers. Before this might be assumed, an entirely new line of thought would first have to be introduced into seismological science. It appears to me to be most improbable, that such large obstructions to earthquake waves could exist, without already having been detected. On the contrary, all known phenomena point to an equally viscus substratum existing below the orogenetic belts of the earth as elsewhere. But is it permissible to imagine the process of crystal sinking in a liquid that may be likened to glass? Currents and convection are the result of forces that work on the entire mass. The sinking of crystals under the influence of gravity, however, is the consequence of a very small force working on a very small mass, while no addition of these minute forces

occurs. It is a very different thing from admitting the possibility of currents in the deeper crust, to concluding that the sinking of crystals is also possible.

In my opinion differentiation in the present earth's crust as a whole must be considered impossible, except in limited masses in small depths, where liquids can exist in the form we know them in.

If we suppose, for the time being, that differentiation can occur, I am still of opinion that it is highly doubtful whether the resulting processes assumed by v. B. will actually take place. According to this investigator the differentiation will result in two layers of about equal thickness, divided by a sharp margin. There are, however, many other possibilities, namely: 1. a gradual change from the top to the bottom; 2. three layers: a thin, light, upper layer, a thin, heavy, lower layer, and a thick layer in between of medium composition; 3. a thin, differentiated layer at the top above a thick hardly differentiated layer, as the result of crystals only forming in the upper regions.

In all these cases the salsima would find no sharply defined zone into which it could press forward as a wedge. In the two first it would work on a deep belt pressing aside the differentiated masses for a short distance over a great depth. The seismological support of v. B.'s view is only an argument, not a proof. The position, the number and the meaning of the surfaces of discontinuity are still open to doubt.

Finally v. B. assumes the process to take place almost entirely without the deeper layers taking part in the movements. The compensating wave of sima might also be replaced by a smaller movement of the substratum.

Let us again assume that v. B.'s assumptions are correct. Still a number of points remain doubtful.

If the crystallisation is slow as compared to the currents no large disturbances of hydrostatic equilibrium will develop. The sequence of events v. B. has proposed will only result in the case of special ratio's between the velocity of the two processes.

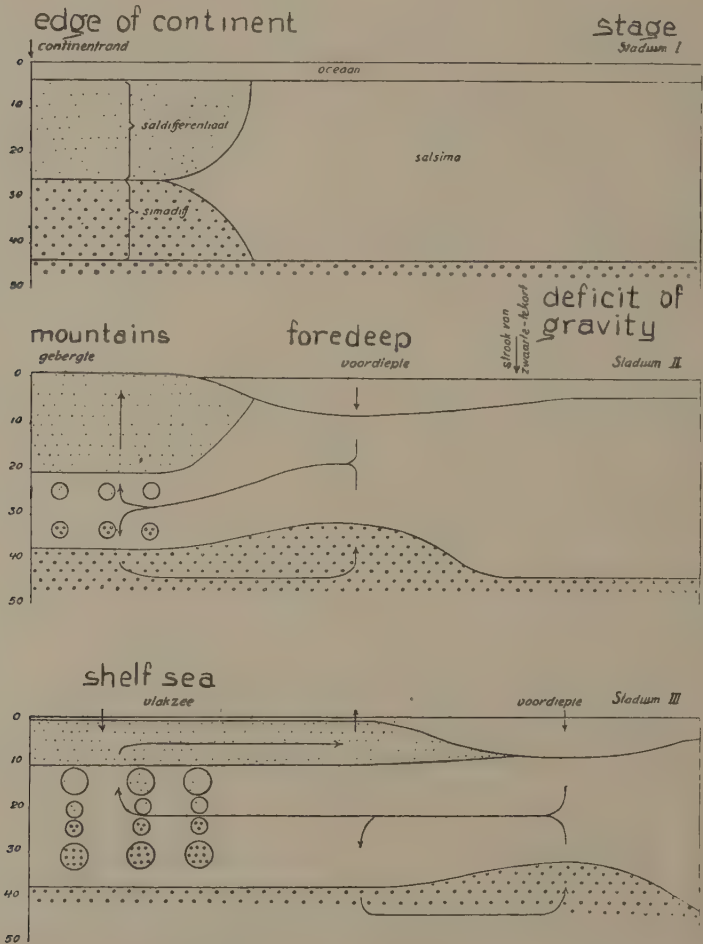
The heat developed by the crystallisation is called upon by v. B. to aid the process of crystallisation and differentiation. The heat generated by radioactive elements is not drawn into the discussion, although it might well be much greater than that generated by the crystallisation. This side of the problem is therefore hardly convincingly treated.

Most rocks are 5—10 % more dense than the corresponding glass, and under high pressure the opposite might be the case. As these differences are of the same order of magnitude as the differences between salsima and its products of differentiation, this aspect of the problem needs further consideration.

The foregoing is by no means meant as disproving that the sequences of events is such as v. B. assumes, but I think I have shown that his line of thought is still highly hypothetical.

The next step is to consider whether a large uplift could result from

the circumstances supposed by v. B. Taking the figure copied from v. B. (de Undatie-theorie, p. 136) as our guide the following remarks can be made.



The salsima is forced in between the sal and the sima at a depth of 25 km. in consequence of a surplus of hydrostatic pressure. In the case of complete fluidity it will continue to flow, until hydrostatic equilibrium is reached in a horizontal plane below the sal, for up till then the motive force still exists. v. B. has overlooked the fact, however, that this limit is set to the influx. This limit is reached even long before the stage II of the figure. Here namely the sal is 21.6 km. thick and exerts a hydrostatic pressure at its basis of 6120 kg per cm^2 for the supposed composition. On the opposite side is found a column of water of 8000 m and 13000 m of salsima. These exert a hydrostatic pressure of 4700 kg per cm^2 . On the

basis of the compositions assumed the motive force would already have disappeared with a difference in height of about 2000 m, and this only in the case of complete differentiation occurring before the current sets in, and continuation of the movement until complete hydrostatic equilibrium was attained. In stage III of the figure the mistake made is still greater. Here sal should be in hydrostatic equilibrium with water.

If the continents were caused by the processes imagined, they would only show as slight bulges on the sea-bottom.

The secondary tectonic processes. Another series of difficulties is found on consideration of the secondary tectonic processes.

If the undation proceeds from *a* to *b*, *c*, *d*, etc. the foreland will come under tectonic influences in the same sequence. In the case of the formation of overthrust sheets, *a* will be thrust into *b*, these together into *c*, this series into *d* etc. In the Alps this series is not met with. The sheets that lie undermost are by no means the youngest in formation. They already showed great activity not only together with the higher elements, but structurally they are in part even older. It is a common feature for the sheets to be attacked from the rear for example. All the zones, that were to take part in the formation of the Alps, already began to show signs of unrest long before the chief phase of the folding. They were not picked up in succession by the advancing undation. The facies of the overthrust sheets is not as should be expected if they had been formed on the slope of a deepsea trough. Similar facies are found over great breadths, interrupted by uncovered ridges of the same age. The deepsea stage is certainly not a phenomenon that moved regularly in time and space through the entire belt.

If I interpret v. B.'s theory rightly every orogenetic belt must be formed out of salsima, and must therefore have lain in a region that used to belong to the deepsea. This does not appear to be the case. The Alps were already folded during the Hercynian orogenetic period. The deepsea stage of Timor was preceded by a shallower period. Other examples could be cited in plenty.

The Atlantic type of coast with mountain chains cut off by the coastline, falls outside the imagined scheme, that is of new material being welded on to the old continents. Must continental drift be assumed to explain these coasts and can the two theories be brought into one natural system?

According to v. B. the roots of the Alpine overthrust sheets are only parts of the sheets that slid backwards, when the undation caught them up and passed them by. But does this explain the intensive compression? And why do they dive down into the substratum and behave so entirely differently to the frontal parts of the overthrusts? The imbricate structure of the Bergamo Alps and below the Scottish overthrusts can only be explained, to my mind, by great horizontal pressure.

The rocks of the Kalk-Alpen (Säntis for example) were deformed plastically and not, or not only, by "Scherflächen"-movements. Stiny's calculations concerning the necessary grade to cause sliding, can therefore be criticized.

The deformation of fossils without rupture and slickensides, especially the folding slickensides parallel to the stratification, are proof of lithification of the sediments before the folding took place. The centre of gravity of the Säntis mountains was elevated considerably with respect to the thrusting plane. The anticlinal limbs have been greatly reduced in thickness, as soon as they passed the vertical position. These facts point to the action of horizontal pressure.

I am further of opinion, that the structure of the Alps cannot be explained by the postulates of the undation theory on account of the great thickness of the whole mass (the sheets are piled on top of each other; they were not pressed up against each other). A detailed explanation of the Alpine orogenetic belt by a series of sections representing the entire development, would if feasible, carry much more weight, than the treatment offered of the Barisan mountains of Sumatra. The latter region is less well exposed, and has been as yet much less intensively examined than the Alps, however excellent the work is that is now being carried out there.

The existence of two zones of elevation in the East Indies is not satisfactorily explained. v. B. says, that the salsima injected below the original zone of differentiation will by differentiating in its turn, cause a second elevation of this region. A clearer exposition of these matters to show how this apparently continuous process could result in a rythmical pulsation, would greatly help a general understanding of the theory.

In bibl. 2, p. 400, v. B. writes concerning the Alps: "Here also the overthrusting begins in the Thetys geosyncline on the side opposite the continent". For the Betic ranges and Atacama he proves the same succession. But is this not in contradiction with the later form given to the theory in which the undation begins on the side of the continent and progresses towards the deepsea?

The author of a new theory is not able immediately to grasp all consequences of his own new idea's. Here others must help. I hope that these objections to the undation-theory may prove of value in this respect. If they are founded on misconceptions or are found to be of no consequence, they will only have aided the growth of the new theory. On the other hand they may also necessitate a modification of the theory or a limitation of its general importance for structural geology. We should never forget that countless objections can also be raised to all other theories of tectonic geology and, moreover, that sliding down of strata explains many observed facts more completely and elegantly than the earlier theories.

Is the truth possibly to be sought half way between?

BIBLIOGRAPHY.

1. R. W. VAN BEMMELEN: Kritische beschouwingen over geotektonische hypothesen. *Natuurk. Tijdschr. Nederl. Indië*, Deel XCI, (1931), p. 94—117.
2. ———: De bicausaliteit der bodembewegingen. *Natuurk. Tijdschr. Nederl. Indië*, Deel XCI, (1931), p. 363—413.
3. ———: Magma- und Krusten-Undationen. *Verh. van het VIe Natuurwetensch. Congres te Bandoeng*, Sept. 1931.
4. ———: De undatie-theorie (Hare afleiding en toepassing op het westelijk deel van den Soendaboog). *Natuurk. Tijdschr. Nederl. Indië*, Deel XCII, (1932), p. 85—242.
5. ———: Ueber die möglichen Ursachen der Undationen der Erdkruste. *Proc. Kon. Ak. van Wetensch. Amsterdam*, Vol. XXXV, (1932), p. 392—399.

Anatomy. — *Rückbildung der Schneidezähne im Ober- und Unterkiefer.*
Von Dr. TH. E. DE JONGE-COHEN. (Communicated by Prof. Dr.
M. W. WOERDEMAN).

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

Es ist gewiss kein Zufall, dass diejenigen, die sich mit dem Studium der Gebissanomalien beschäftigen, ihre Beispiele in erster Linie der bleibenden Gebissreihe entlehnen um sich dann hinsichtlich derselben Erscheinungen in der Milchdentition auf eine Interpretation *per analogiam* zu beschränken. Der Grund hierzu — der übrigens den älteren Autoren bereits bekannt war — liegt auf der Hand: progressive wie regressive Entwicklungstendenzen äussern sich vorzugsweise im permanenten Gebiss; es ist, als wäre das Milchgebiss in viel geringerem Masse ihrem Einfluss ausgesetzt.

Einige Zahlen zur Erläuterung. Wir entlehnen sie der Dissertation von FAVÉ (I), dem bei seinen Untersuchungen das gesamte Material des odontologischen Institutes der Universität Zürich zur Verfügung stand.

244

1. Gebiss : 18				2. Gebiss : 225			
Überzahl : 17		Unterzahl : 1		Überzahl : 175		Unterzahl : 51	
oben	unten	oben	unten	oben	unten	oben	unten
15	2	1	0	168	7	36	15

Es möge darum deutlich sein, dass wir die Entwicklung der überzähligen Schneidezähne — eine Variation, die, wie aus den Zahlen von RÖSE (II) hervorgeht, verhältnismässig häufig in der bleibenden Reihe auftritt — bei

ihren lactealen Vorgängern zu den grösseren Seltenheiten zählen können. Gleich begreiflich ist es, dass wir Rückbildung des lateralen Incisivus im Oberkiefer nur sehr ausnahmsweise im Milchgebiss zurückfinden. Übrigens haben schon frühere Untersuchungen zur Genüge bewiesen, dass dieser auch im Milchgebiss dazu verurteilt ist, zu verschwinden — eine Tatsache, welche wir wiederum bestätigt finden in den Fällen aus unserem Museum, die wir auf Tafel II und III (Abb. 8 u.f.) abbilden.

Wie steht es in dieser Hinsicht um den Unterkiefer?

Auch hier kommt beim bleibenden Gebiss in der Gegend der Incisivi Rückbildung vor. Die Fälle sind aber auffallend selten und bei weitem nicht so typisch wie im Oberkiefer. Lässt man die Fälle ausser Betracht, die augenscheinlich auf die Pathologie der Entwicklung zurückzuführen sind — wir denken z.B. an die von CHRIST (III) beschriebenen Randatrophien und an die vielen kasuistischen Mitteilungen aus späteren Jahren, die sich alle auf Fälle von Oligodontie bzw. Anodontie beziehen — so scheinen es hier die zentralen Schneidezähne zu sein, die, in markantem Gegensatz zu ihren Antagonisten in der Maxilla, eine Neigung zur Rückbildung bzw. zur Agenesie zeigen. Zur Erläuterung einige Abbildungen [Tafel I und II (Abb. 1—7)].

Im Licht obiger und auch auf Grund der in der Literatur erwähnten Fälle scheint uns die Annahme nicht zu kühn, dass der Unterkiefer sich durch Reduktion des medialen Schneidezahnes dem Verlust des lateralen im Oberkiefer wird anzupassen wissen.

Nun wissen wir sehr gut, dass wir mit dieser Hypothese einen Schritt weiter gehen als BOLK, der in seiner 1912 erschienenen *Schets van de ontwikkelingsgeschiedenis van het menschelijk gebit* (IV) seinen Standpunkt mit Bezug auf diese Frage so formulierte: „Der Verlust unseres lateralen Schneidezahnes scheint aber auf den Oberkiefer beschränkt zu sein. Allerdings kommen auch Fälle vor, dass im Unterkiefer statt vier nur drei Inzisivi durchbrechen, doch diese Fälle sind selten und dazu atypisch, während von einer eigentlichen Rückbildung weder bei den lateralen noch bei den medialen Schneidezähnen eine Spur zu finden ist, sodass in solchen Fällen auch nicht die geringste Andeutung zu einem Entwicklungsprozess vorliegt. Diese vereinzelt Fälle müssen anderen Ursachen — Retention, Keimatrophie u.ä. — zugeschrieben werden. Diese Tatsache verdient wohl einen Augenblick unsere Aufmerksamkeit, denn wenn der Rückbildungsprozess regelmässig weiterschreitet, so entsteht beim Menschen einmal ein Zustand im Gebiss, der sonst bei den Primaten nicht vorkommt (ich rechne dann die Halbaffen nicht zu den Primaten) dass n.l. der Bau des Gebisses im Ober- und Unterkiefer ungleicher geworden ist. Im Oberkiefer wird ja dann die Anzahl der Inzisivi auf zwei reduziert sein und im Unterkiefer werden sich vier befinden. In der Tat ist dieses jetzt schon bei einer gewissen Anzahl Europäer der Fall, nämlich bei denen, die an beiden Seiten keinen lateralen Inzisivus haben. Doch macht das Gebiss solcher Personen durchaus nicht den Eindruck verminderter Validität und zwar aus dem



Abb. 1 und 2. Reduktion des rechten mittleren Schneidezahnes.



Abb. 3. Reduktion des linken mittleren Schneidezahnes.

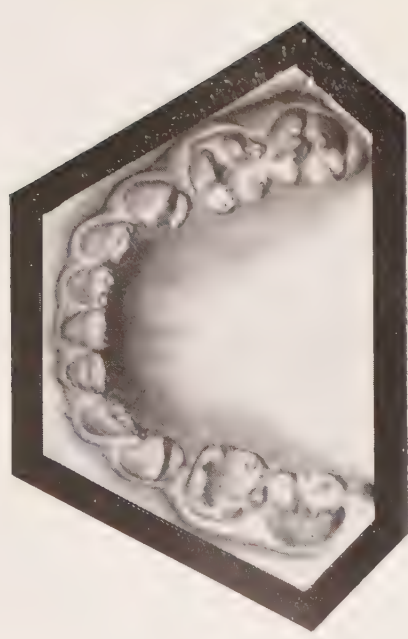


Abb. 4. Agenesie eines mittleren Schneidezahnes.



Abb. 5 und 6. Agenesie eines mittleren Schneidezahnes.



Abb. 7. Agenesie beider mittleren Schneidezähne.
Proceedings Royal Acad. Amsterdam, Vol. XXXV, 1932.

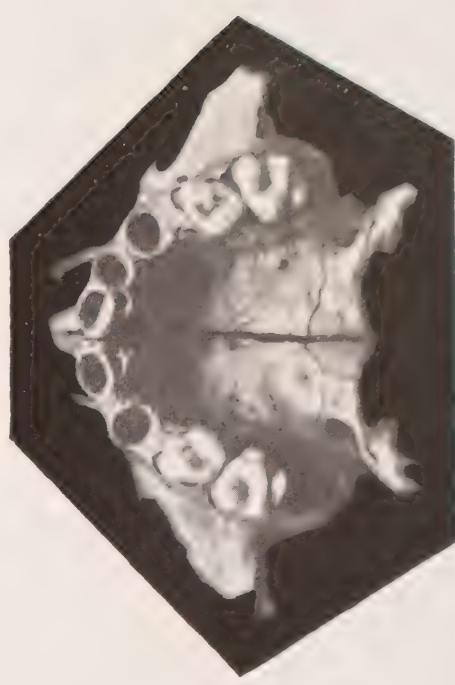


Abb. 8. Agenesie des rechten seitlichen Schneidezahnes.

Grunde, dass beide Incisivi auffallend breit sind, sodass sie mit den vier Schneidezähnen des Unterkiefers artikulieren können" ¹⁾).

Zwar geben wir sofort zu, dass die Erfahrung lehrt — auch von anderer Seite ist darauf hingewiesen worden [SCHWARZ (V)] — dass Aplasie des lateralen Schneidezahnes der Entwicklung seines medialen Synergeten zugute zu kommen scheint; stellen dem aber an erster Stelle gegenüber, dass Bolk damals noch nicht über ein so reiches Museummaterial verfügen konnte, auf das sich heute unsere Ansicht stützt. Davon aber abgesehen, glauben wir nicht, dass zwischen den vier Frontzähnen des Prämaxillare — C. J. I J. I C. — und ihren sechs Antagonisten im Unterkiefer — C. J. II J. I J. I J. II C. — eine normale Gebisschärfe möglich wäre.

Dazu halten wir ja die Schwierigkeiten für zu ernst, die solch eine Gebissstruktur dem Zustandekommen und der Erhaltung des Artikulationsgleichgewichts — durch jenes bewunderungswürdige Spiel der Kräfte geschaffen, über das wir noch immer reden ohne seinem *primum movens* auch nur einen Schritt nähergekommen zu sein — bereiten würde. Schon sein Zustandekommen würde während der Gebissentwicklung erschwert, wo nicht unmöglich gemacht werden: namentlich während der Wechselperiode könnten sie jene Abweichungen verursachen, die der Kliniker jetzt schon in vielen der Fälle kennt, bei denen sich nur der Oberkiefer durch Agenesie des lateralen Schneidezahnes kennzeichnet.

Doch auf eine mindestens ebenso schwere Probe würde sein Erhalten in ausgewachsenem Zustande gestellt werden. Ein sehr charakteristisches Merkmal doch, das das menschliche Gebiss mit dem der Primaten gemein hat, ist dieses, dass seine Zähne eine ununterbrochene, geschlossene Reihe bilden. In dem Entwicklungsgange nun, wie Bolk ihn sich denkt, würde diese Kontinuität unwiederbringlich verlorengehen und damit würde nicht nur der Möglichkeit, dass Verschiebungen unter den Gebisselementen selbst stattfinden würden, Vorschub geleistet, auch ihre Validität würde in Gefahr gebracht werden. Ob die vier Incisivi des Oberkiefers überhaupt noch fähig sein würden, dem Kaudruck von sechs Unterkiefer-Elementen genügend Widerstand zu leisten, liesse sich u.E. zum mindesten bezweifeln.

Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, leuchtet es ein, dass wir die von Bolk gegebene Lösung dieser Frage nicht annehmen können, es sei denn dass eine bedeutende Verbreiterung der Krone bei den vier übriggebliebenen Frontzähnen imstande wäre, die Folgen der Reduktion aufzuheben. Eine solche Entwicklung nun wäre schon sehr unlogisch: dann wäre ja der ganze Reduktionsprozess des lateralen Schneidezahnes überflüssig gewesen — selbst zwecklos! Überdies aber wäre sie von ästhetischem Standpunkte aus — auch dieser Faktor hat in der Formgenese unserer Frontzähne eine nicht zu unterschätzende Rolle gespielt — nicht anzunehmen.

Es steht darum fest, dass Rückbildung im Oberkiefer eine Äquivalenz im Unterkiefer haben muss: als solche betrachten wir die Regression des

¹⁾ S. Zit. pag. 191 (Übersetzung des holländischen Textes).

medialen, Incisivus. Allerdings ist die Intensität dieses noch kaum wahrnehmbaren Entwicklungsprozesses bedeutend geringer als im Oberkiefer, doch man vergesse nicht, dass dieser in gewissem Sinne den Angriffspunkt der besprochenen Rückbildung bildet und wir dürfen nicht erwarten, dass der Unterkiefer davon sofort den Rückschlag erfährt.

Schliessen wir nun, indem wir die Reduktion, wie wir sie uns denken, in zwei Formeln festlegen, so können wir — mit Vernachlässigung der postcaninen Gebisselemente — den Oberkiefer unter die Formel

$$C. + J.I \quad J.I + C.^1)$$

bringen, während die Struktur des Unterkiefers der Formel

$$C. J.II + + J.II C.$$

entspricht.

Dass also in der Phylogenie unseres Gebisses zum ersten Mal auch Rückbildung zweier nicht homologer Elemente auftritt, ist eine Merkwürdigkeit, die in diesem Zusammenhange nicht unerwähnt bleiben darf.

Was wissen wir nun von Rückbildung in der Milchdentition? Zum Teil haben wir die Frage schon oben beantwortet durch die Mitteilung „dass wir Reduktion des lateralen Incisivus im Oberkiefer nur ganz ausnahmsweise im Milchgebiss 'zurückfinden.'“ (Zit. pag. 1162.)

Für den Oberkiefer können wir deshalb diese Formel aufstellen:

$$c. + i. I \quad i. I + c. .$$

Kennzeichnet sich dieser Rückbildungsprozess schon im Oberkiefer durch seinen seltenen Charakter, was den Unterkiefer angeht, *darüber ist uns keine einzige Mitteilung in der Literatur bekannt* ²⁾).

Allein schon aus diesem Grunde wäre der in Abb. 12 a und b abgebildete Kinderschädel es wert, dass wir ihm unsere ganze Aufmerksamkeit schenken — es sind aber noch zwei andere Besonderheiten da, die unser Interesse in gleichem Mass verdienen. Zunächst schliessen die Rückbildungserscheinungen im Unterkiefer sich bilateral-symmetrisch vollkommen denen im Oberkiefer an. Aber die bei weitem markanteste Besonderheit ist wohl diese, dass auch der numerische Aufbau des Unterkiefers der oben für das bleibende Gebiss gegebenen Formel genau entspricht: der Bau des vorhandenen Incisivus — der rechte ist offenbar verloren gegangen — ist so typisch der eines lateralen, dass seine Identität über jeden Zweifel erhaben ist. M.m. lautet darum auch hier die Gebissformel:

$$c. i. II + + i. II c. .$$

Es wäre voreilig und darum unvorsichtig, auf diesen einzigen Fall schon

1) Die exalierten Elemente geben wir in diesen Formeln mit dem Symbol + wieder.

2) Dass die Strukturvereinfachung bei den Milchzähnen auch sonst einen besonderen Charakter trägt, haben wir früher bereits dargetan: „bis jetzt“, so schrieben wir in unserer *Vierde Bijdrage tot de kennis van enkele gebitsanomalieën* (VI) „waren Vereinfachungserscheinungen in der Molargegend des Milchgebisses, auch als inzidentelle Erscheinung durchaus unbekannt“ (S. Zit. pag. 991 — Übersetzung des holländischen Textes).



Abb. 9. Agenesie des linken seitlichen Schneidezahnes.

Abb. 10 und 11. Agenesie der beiden seitlichen Schneidezähne.

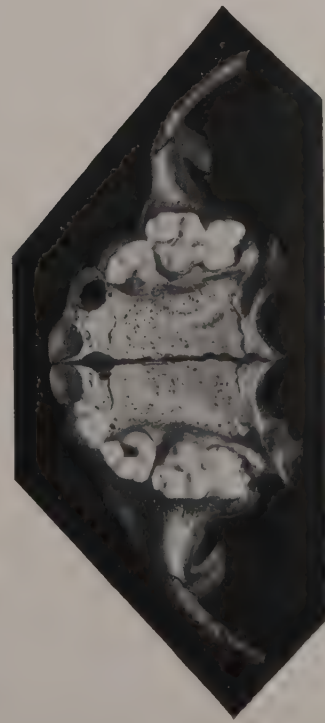


Abb. 12a und b. Bilateral-symmetrische Agenesie des seitlichen Schneidezahnes im Oberkiefer und des mittleren Schneidezahnes im zugehörigen Unterkiefer.

Neurology. — *Über den Verlauf der okzipitalen Balkenfasern und eine neue Verbindung des Cingulum beim Java-Affen.* (Mitteilung aus dem Hirnanatomischen Laboratorium der neurologischen Universitätsklinik, Wilhelmina-Gasthuis, Amsterdam.) Von A. BIEMOND. (Communicated by Prof. B. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

Der Balken ist im Laufe der Jahre Gegenstand unzähliger anatomischer und experimentell-physiologischer Untersuchungen gewesen, und wenn auch verschiedene Probleme zur Lösung gebracht wurden, so sind doch ebensoviele strittige Punkte unerledigt geblieben. Es gibt indessen auch Balkenprobleme, welche die Aufmerksamkeit der Untersucher verhältnismässig wenig erregten. Hierzu gehört der Verlauf der okzipitalen Balkenfasern in ihrem Wege vom Splenium, über Forceps major, Radiatio corporis callosi und Forceps minor nach dem Okzipitalpol. Für den Menschen hat DÉJERINE angegeben, dass das Splenium corporis callosi die okzipitalen Balkenfasern liefert, und zwar in dem Sinne, dass der Forceps major O_1 , O_2 , O_3 und Cuneus versorgt, und der Forceps minor den Lobulus lingualis und fusiformis. Ferner konnte DÉJERINE bei Läsionen in der Gegend der Fissura parieto-occipitalis und der Calcarina-Rinde die Degeneration in dem Forceps major und den tiefen Teilen des Spleniums verfolgen, während aus den anderen Hinterhauptsgebieten besonders Degeneration im Forceps minor und dem Rande des Spleniums auftrat. OBERSTEINER, der von einer Einteilung des Spleniums in einen vorderen, mittleren und hinteren Teil ausgeht, glaubt, dass die okzipitalen Balkenfasern durch den vorderen und mittleren Teil, die temporalen Fasern dagegen durch den hinteren Spleniumteil hindurchtreten.

Der Autor dieses Artikels erhielt nun Gelegenheit, diesen Gegenstand näher in Studium zu nehmen, durch den Umstand, dass er bei 4 Java-Affen (*Cynomolgus fascicularis*) das Splenium (und zwar ausschliesslich den vorderen und mittleren Teil desselben) vollständig zerstören konnte. Zu dieser Operation wurden sehr dünne Nadeln, die mit Ausnahme ihrer Enden isoliert waren und durch welche der Strom eines Diathermie-Apparates hindurchgeleitet wurde, verwendet. Die Technik der Operation war nun folgende: Unter Äthernarkose wurde nach Unterbindung des Sinus longitudinalis superior über beiden Grosshirnhälften trepaniert, worauf die Hemisphären auseinandergehalten wurden und die oben beschriebene Nadel (oder Nadeln) in den zutage tretenden Balken eingestochen wurde. Auf diese Weise war es möglich, zirkumskripte Läsionen auszuführen und zugleich die Gefahr vor Blutung erheblich zu verringern. Alle Läsionen wurden links von der Medianlinie angebracht. Drei von den vier operierten Tieren wiesen nach dem Eingriff keine auffallenden Erscheinungen auf; das vierte aber bekam eine rechtsseitige Hemiparese. Alle Tiere wurden nach 16 Tagen getötet und die Gehirne nach der

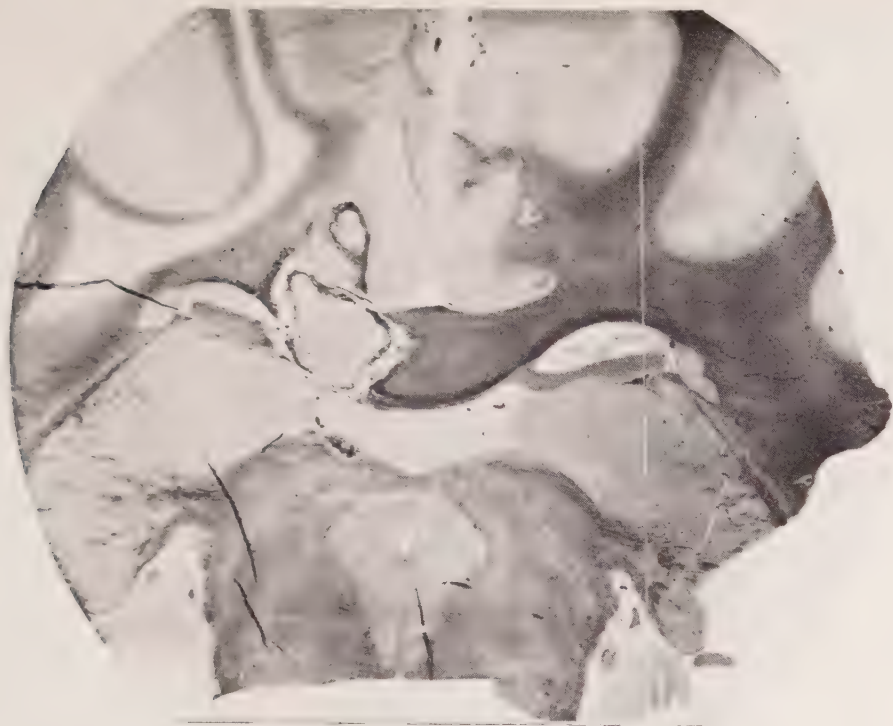


Fig. 1. Vollständige Durchschneidung des Balkens im Spleniumteile mit Läsion des Cingulums.



Fig. 2. Degenerierte *einstrahlende* Balkenfasern längs der lateralen Wand des Seitenventrikels.

LATERAL

MEDIAL



Fig. 3. Degenerierte *austretende* Balkenfasern längs der medialen Wand des Seitenventrikels.

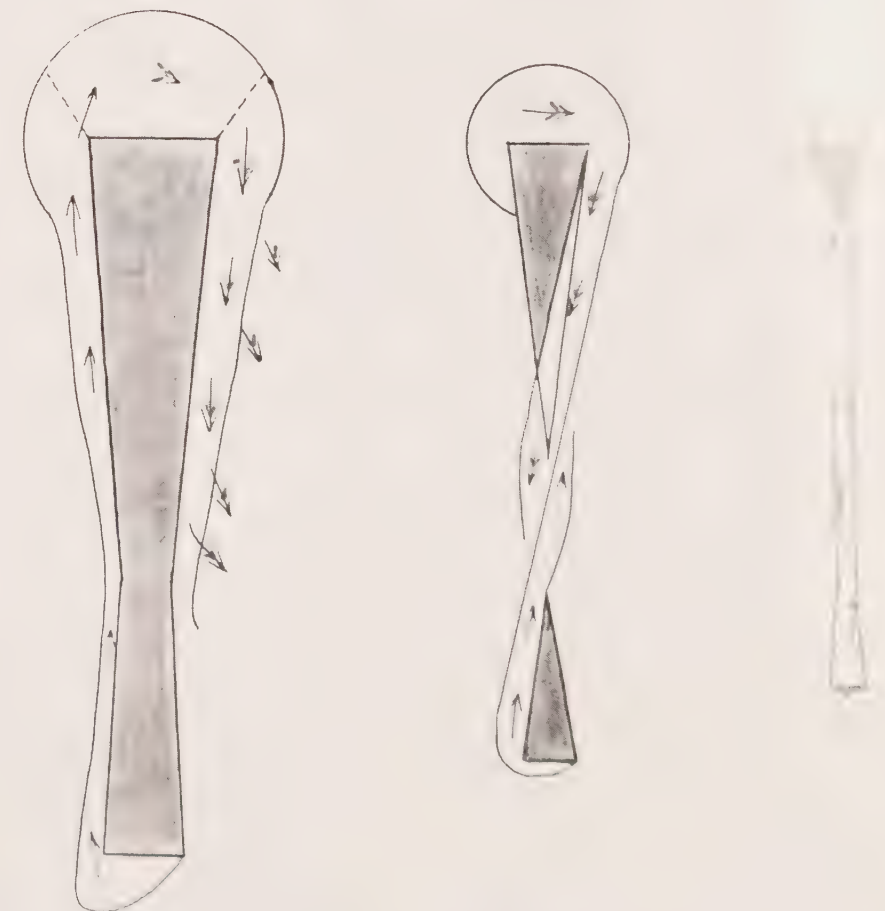


Fig. 4. Schema der einstrahlenden und austretenden Balkenfasern auf drei hinten einander gelegenen Frontalschnitten.
→ = austretend. → = einstrahlend.

Marchi-Methode in Serienschnitten bearbeitet. Es zeigte sich nun, dass in allen vier Fällen der Balken links von der Medianlinie durchschnitten war und fast das ganze Splenium (ausser dem allerhintersten Teile) und der angrenzende Teil des Cingulum zerstört waren (fig. 1). Bei einem Tiere beschränkte die Läsion sich genau auf die soeben genannten Teile; bei dem zweiten bestand daneben eine minimale Läsion des gleichseitigen Corpus quadrigeminum anticum; bei dem dritten war eine kleine Nebenläsion des Nucleus lateralis thalami angebracht, und beim vierten Tiere schliesslich (das postoperativ eine Hemiparese aufwies) war die oberflächliche Schicht der Konvexität des linken Gyrus centralis anterior und posterior etwas beschädigt.

Es wurde nunmehr versucht, durch systematisches Studium dieser vier, in Serienschnitten bearbeiteten Gehirne einen näheren Einblick in den Verlauf der okzipitalen Balkenfasern, die durch die Läsion des Spleniums zu sekundärer Degeneration gebracht waren, zu erhalten. Als Vergleichungsmaterial fanden sieben, früher bearbeitete Serien (alle mit Läsionen der linken Area striata) derselben Tierart Verwendung¹⁾. Hierdurch war es möglich, zu verfolgen, ob die im Hinterhauptshirn einstrahlenden okzipitalen Balkenfasern (die bei den letzten vier Gehirnen zur Degeneration gebracht wurden) einen anderen Verlauf als die austretenden Balkenfasern (der sieben früher bearbeiteten Gehirne) haben, wenn denn auch bei den letztgenannten eine Vermischung mit degenerierten Projektions- und Assoziationsfasern bestand. Es zeigte sich nun Folgendes: Von dem vorderen (zerstörten) Teile des Spleniums aus konnten Balkenfasern in kompakter Masse verfolgt werden, die beiderseits in ziemlich symmetrischer Weise in die hinteren Parietalwindungen ausstrahlten. Es war in diesen *Marchi*-Präparaten nicht möglich, die Balkenfasern bis in die graue Masse des Cortex zu verfolgen. In die Temporalwindungen strahlten fast keine degenerierten Balkenfasern aus, vermutlich infolge des Umstandes, dass der hintere Teil des Spleniums verschont blieb. (siehe bei OBERSTEINER). Durch den mittleren Teil tritt, wie bekannt, die grosse Masse der okzipitalen Balkenfasern. In unseren ersten vier Serien sieht man diese, en masse degenerierten Fasern nach dem oberen Pol des Seitenventrikels gerichtet (sowohl links als rechts), dort, wo der Forceps major gebildet wird. Verfolgt man nun die Serien in frontokaudaler Richtung, dann sieht man, dass die Balkenfasern beginnen längs der lateralen Wand des Seitenventrikels als Radiatio corporis callosi abzu- steigen (fig. 2), wobei eine allmähliche Abgabe von Fasern lateralwärts stattfindet, die ihren Weg nach dem tiefen Hemisphärenmark nehmen. Ganz anders ist das Bild, wenn man in einem entsprechenden frontalen Schnitt den Weg der austretenden Balkenfasern in den Serien mit Läsion der Area striata verfolgt. Hier sieht man, dass die degenerierten Fasern alle längs der

1) S. bei A. BIEMOND: Experimentell-anatomische Untersuchungen über die cortico-fugalen optischen Verbindungen bei Kaninchen und Affen — Z. f. d. ges. Neur. u. Psych. Bd. 129. 1930.

medialen Ventrikelwand aufsteigen und schliesslich in den Forceps major übergehen, während das Faserbündel längs der lateralen Wand ganz frei bleibt von Degeneration (fig. 3).

In einem mehr nach hinten gelegenen Frontalschnitt fällt wieder folgender Unterschied zwischen einstrahlenden und austretenden Balkenfasern auf: die ersteren sieht man jetzt auf den unteren Teil der medialen Ventrikelwand übergehen; die letzteren befinden sich auf einem entsprechenden Niveau noch teilweise medial, doch auch längs dem unteren Teile der lateralen Wand, während sie offenbar den grössten Teil des Forceps minor bilden. In der Nähe des Okzipitalpoles schliesslich, wo das Ventrikellumen verschwunden ist, die Fasergruppen sich jedoch noch immer um eine bestimmte (— in den Präparaten als ein Strich sichtbare —) Achse gruppieren, findet man den Rest der einstrahlenden Balkenfasern alle medial, die austretenden wahrscheinlich alle lateral. Wiederholt sieht man in günstig getroffenen Schnitten die „Umbiegestelle“ der Balkenfasern von lateral nach medial, bzw. von medial nach lateral. Denkt man sich nun die beschriebenen Verhältnisse im räumlichen Sinne und sieht man den Faserverlauf in seiner Kontinuität, dann muss sich der Verlauf der okzipitalen Balkenfasern folgendermassen gestalten: *Die einstrahlenden, vom Forceps major ausgehenden Balkenfasern, führen in Bezug auf den Seitenventrikel eine Achsendrehung von lateral nach medialwärts aus. Die austretenden Balkenfasern dagegen drehen um dieselbe Achse, jedoch in entgegengesetzter Richtung und kommen am oberen Pol des Ventrikels im Forceps major zusammen* (fig. 4).

Der zweite Teil dieser Untersuchung ist dem Cingulum gewidmet. Wie schon erwähnt, wurde bei unseren 4 Versuchstieren mit Balkendurchschneidung der angrenzende Teil des Cingulums mit zerstört. Diese mysteriöse bogenförmige Faserverbindung, die als fronto-okzipital gerichtetes Assoziationsbündel bezeichnet zu werden pflegt, wurde zuerst von BURDACH beschrieben und beim Affen sehr eingehend von BEEVOR studiert (fig. 5). Nach letzterem Untersucher besteht das Cingulum aus 3 von einander unabhängigen Teilen und zwar: 1. einem vorderen Teil, der die Olfactoriuswurzel mit dem vorderen Teile des Frontalpoles in Verbindung bringen soll; 2. einem langen wagerechten, links und rechts von der Medianlinie oberhalb des Balkens verlaufenden Teile, und 3. einem hinteren Teile, der den Gyrus hippocampi mit dem Lobulus lingualis und fusiformis verbinden soll (fig. 6). Während es nun ziemlich sicher ist, dass sowohl der vordere als der hintere Teil des Cingulums zerebrale Riechgebiete in wechselseitige Verbindung bringen, ist die Funktion des grossen horizontalen Teiles völlig unbekannt geblieben. Die Studie BEEVOR's vermeldet eine von HORSLEY ausgeführte Operation, bei welcher bei einem Affen das Cingulum horizontale durchschnitten wurde. Es trat eine Degeneration im Cingulum in kaudaler Richtung auf, jedoch nur auf einer kurzen Strecke. BEEVOR schliesst hieraus, dass das Cingulum horizontale keine ununterbrochene Verbindung ist, sondern aus einer Anzahl kurzer Fasern zusammengesetzt

sein muss. Ferner hält er es für wahrscheinlich, dass das Bündel Fasern von den verschiedensten Grosshirngebieten, u.a. der ersten Frontalwindung, dem Lobulus praecentralis, dem Cuneus und Praecuneus, empfängt und auch an diese Gebiete abgibt.

LA SALLE ARCHAMBAULT widmete in seiner grossen Studie über die zentrale optische Bahn ebenfalls dem Cingulum seine Aufmerksamkeit. Er glaubt, dass das Cingulum superius (horizontale) im Okzipitalhirn in den SACHSchen Fasciculus transversus cuneï, und das Cingulum inferius (posterius) in den VIALETSchen Fasciculus übergeht. Er leugnet jede Beziehung zwischen dem Cingulum sup. und inf. und betont, dass das Cingulum sup. ein beträchtlicheres Bündel ist, das mit einer Anzahl Grosshirnrindengebiete in Verbindung tritt. VAN VALKENBURG fand, dass das Cingulum horizontale Fasern aus der ersten Temporalwindung und dem Gyrus supramarginalis bekommt. Im Gegensatz zu LA SALLE ARCHAMBAULT glaubt er, dass das Cingulum horizontale und posterius mit einander in ununterbrochenem Zusammenhang stehen. ARIËNS KAPPERS weist darauf hin, dass man zweifelsohne zwei Cingulae unterscheiden muss, und zwar zunächst ein *Cingulum ammonale* (Tractus spheno-ammonicus CAJAL's), das zwischen Fascia dentata und Ammonspyramide von hinten nach vorn verläuft. Dies ist ein Riechcingulum, das bei höheren Tieren wahrscheinlich ins Induseum übergeht. Das zweite, nach ARIËNS KAPPERS zu unterscheidende Cingulum wurde von ihm als *Cingulum limitans* bezeichnet, da es auf der Grenze zwischen der Riechrinde und dem Neocortex liegt. Der lokalen Zerstörung dieses Cingulums horizontale (sive superius, sive limitans) muss es nun zugeschrieben werden, dass in der linken Hirnhälfte aller vier Versuchstiere ein degeneriertes Faserbündel verfolgt werden kann mit folgendem Verlauf: Von der Läsion des Cingulums an fügen sich die anfangs noch zerstreuten und mit degenerierten Balkenfasern vermischten Fasern bald zu einem mehr kompakten Bündel zusammen, das sich rings um den Kopf des Nucleus caudatus biegt, darauf (auf einem mehr kaudal liegenden Niveau, wo das Pulvinar seine grösste Ausdehnung erreicht) durch die Capsula interna und die Gitterschicht tritt (fig. 7) und schliesslich in die Faserstrahlung des Pulvinars übergeht. Es sind insbesondere die mehr dorsal gelegenen Fasern dieser Strahlung, welche die MARCHI-Körnung zeigen (fig. 8). Alle degenerierten Fasern endigen schliesslich im gleichseitigen Corpus quadrigeminum anticum und zwar ausschliesslich im Stratum medullare superficiale desselben. In der rechten Gehirnhälfte blieben Pulvinar und Corpus quadrigeminum anticum von Degeneration ganz verschont. *Es darf also angenommen werden, dass beim Java-Affen das Cingulum limitans via der Faserstrahlung des Pulvinars mit dem Dach des Mittelhirns homolateral verbunden ist.*

Was die physiologische Bedeutung dieser anatomischen Tatsache sein kann, muss momentan noch völlig dahingestellt bleiben. Dass das Cingulum jedoch in irgend einer Weise an der Innervationsleitung von Blickbewegungen beteiligt ist, scheint ziemlich wahrscheinlich.

LITERATURANGABE.

1. C. U. ARIËNS KAPPERS: Vergleichende Anatomie des Nervensystems, 1921.
2. CH. E. BEEVOR: On the course of the fibres of the cingulum and the posterior parts of the corpus callosum and fornix in the marmoset monkey. Philosophical transactions of the Royal Society, London, 1892.
3. J. DÉJÉRINE: Anatomie des Centres Nerveux, 1899.
4. J. LÉVY—VALENSI: Le Corps Calleux, Monogr. 1910.
5. G. MINGAZZINI: Der Balken, Monogr. 1922.
6. OBERSTEINER: Bau der nervösen Zentralorgane, 1912.
7. LA SALLE ARCHAMBAULT: Le faisceau longitudinal inférieur et le faisceau optique central-Nouvelle Iconographie de la Salpêtrière, Tome XIX, 1906.
8. C. T. VAN VALKENBURG: Zur Anatomie der Projektions- und Balkenstrahlung des Hinterhauptlappens sowie des Cingulums — Monatschrift für Psychiatrie und Neurologie, Bd. XXIV, 4.

Mathematics. — *Über die asymptotische Entwicklung von*

$$\int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{\nu z - w \sinh z} dz \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} \right)$$

für grosse Werte von $|w|$ und $|\nu|$. (Erste Mitteilung). Von
C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

Einleitung.

In einer Abhandlung¹⁾, die in kurzem erscheinen wird, habe ich unter gewissen Voraussetzungen mittels der Methode der Sattelpunkte für die BESSELSchen und HANKELSchen Funktionen grosser Ordnung und grossen Arguments asymptotische Entwicklungen abgeleitet und numerische obere Schranken bestimmt für die Restglieder, die entstehen, wenn man diese Entwicklungen irgendwo abbricht. Die HANKELSche Funktion $H_v^{(1)}(w)$ besitzt²⁾, falls $w \neq 0$ ist und μ_1 und μ_2 beliebige Zahlen sind, die den Bedingungen $-\frac{\pi}{2} < \mu_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \mu_2 < \frac{\pi}{2}$ genügen, die Integraldarstellung

$$H_v^{(1)}(w) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty + i(\arg w + \mu_1)}^{\infty + i(\pi - \arg w + \mu_2)} e^{w \sinh z - \nu z} dz.$$

In der vorliegenden Arbeit betrachte ich eine verwandte Funktion,

¹⁾ Asymptotische Entwicklungen von BESSELSchen und HANKELSchen Funktionen für grosse Werte des Arguments und der Ordnung, Math. Ann. 1932 oder 1933. Ich werde diese Arbeit hier stets als Abh. B zitieren.

²⁾ Siehe § 2 von Abh. B.

nämlich die Funktion $T_\nu(w)$, die für jedes $w \neq 0$ und jedes μ im Intervall $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$ durch die Beziehung ¹⁾

$$T_\nu(w) = \int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{yz - w \sinh z} dz \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

definiert werden kann.

Diese Funktion ist auch von Herrn WATSON ²⁾ behandelt worden. Er leitet für grosse Werte von $|w|$ und $|\nu|$ eine asymptotische Entwicklung für $T_\nu(w)$ ab; er bestimmt aber keine numerische obere Schranke für das Restglied, das man erhält, wenn man die Entwicklung irgendwo abbricht.

In dieser Abhandlung werde ich die beiden folgenden Fälle näher betrachten:

1. $\arg w = \arg \nu$ und zugleich $\frac{w}{\nu} > 1$;
2. $\arg w = \arg(-\nu)$ und zugleich $\frac{w}{-\nu} > 1$.

Ich werde für diese beiden Fälle nicht nur für $T_\nu(w)$, sondern auch für $T'_\nu(w)$ eine asymptotische Entwicklung ableiten und numerische obere Schranken bestimmen für die Restglieder, die entstehen, wenn man diese Entwicklungen irgendwo abbricht.

Mein Ergebnis kann folgendermassen abgefasst werden ³⁾.

Definition 1. Es sei l ganz rational ≥ 0 , k ganz rational, $0 \leq k \leq l$, $q_{l,k}$ gleich $\binom{-2l-1}{k}$ mal dem Koeffizienten von s^{l-k} in der Entwicklung von

$$\left(\frac{1}{3!} + \frac{s}{5!} + \frac{s^2}{7!} + \dots \right)^k$$

nach steigenden Potenzen von s ; es sei $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, und es werde

$$Q_l(\sec \alpha) = \frac{1}{(\sec \alpha - 1)^{2l+1}} \sum_{k=0}^l q_{l,k} \left(\frac{\sec \alpha}{\sec \alpha - 1} \right)^k \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gesetzt ⁴⁾.

¹⁾ Der Wert des Integrals (1) ist bekanntlich, falls $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$ ist, nicht von μ abhängig.

²⁾ G. N. WATSON, A treatise on the theory of BESSEL Functions, p. 312–319.

³⁾ Eine leere Summe wird in dieser Arbeit stets gleich 0 und ein leeres Produkt gleich 1 gesetzt.

⁴⁾ Man hat also $q_{0,0} = 1$ und $q_{l,0} = 0$, falls $l \geq 1$ ist.

Bemerkung. Man hat

$$q_{0,0} = 1 \quad ; \quad q_{1,0} = 0, q_{1,1} = -\frac{1}{2};$$

$$q_{2,0} = 0, q_{2,1} = -\frac{1}{24}, q_{2,2} = \frac{5}{12};$$

$$q_{3,0} = 0, q_{3,1} = -\frac{1}{720}, q_{3,2} = \frac{7}{90}, q_{3,3} = -\frac{7}{18};$$

$$q_{4,0} = 0, q_{4,1} = -\frac{1}{40320}, q_{4,2} = \frac{41}{6720}, q_{4,3} = -\frac{11}{96}, q_{4,4} = \frac{56}{144}.$$

Definition 2. Es sei l ganz rational ≥ 0 , k ganz rational, $0 \leq k \leq l$; es seien $q_{l,k}$ die in Definition 1 gegebenen Zahlen und $q_{l,l+1} = 0$; es sei

$$p_{l,k} = \frac{(2l+k+1) q_{l,k} - (k+1) q_{l,k+1}}{2l+1}, \dots \quad (3)$$

$0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, und es werde

$$P_l(\sec \alpha) = -\frac{1}{(\sec \alpha - 1)^{2l+2}} \sum_{k=0}^l p_{l,k} \left(\frac{\sec \alpha}{\sec \alpha - 1} \right)^k \dots \quad (4)$$

gesetzt.

Bemerkung. Man hat

$$p_{0,0} = 1 \quad ; \quad p_{1,0} = \frac{1}{6}, p_{1,1} = -\frac{2}{3};$$

$$p_{2,0} = \frac{1}{120}, p_{2,1} = -\frac{13}{60}, p_{2,2} = \frac{7}{12};$$

$$p_{3,0} = \frac{1}{6040}, p_{3,1} = -\frac{1}{48}, p_{3,2} = \frac{4}{15}, p_{3,3} = -\frac{5}{9};$$

$$p_{4,0} = \frac{1}{362880}, p_{4,1} = -\frac{251}{81440}, p_{4,2} = \frac{2761}{60480}, p_{4,3} = -\frac{209}{648}, p_{4,4} = \frac{715}{1296}.$$

Satz. Es sei $v \neq 0$, $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \arg(v \sec \alpha) < \pi$ und N ganz rational ≥ 0 .

Behauptungen:

$$\frac{1}{v} \frac{dT_v(v \sec \alpha)}{d \sec \alpha} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(2l+1)! P_l(\sec \alpha)}{v^{2l+2}} + \theta_1 \frac{(2N+1)! P_N(\sec \alpha)}{v^{2N+2}};$$

$$T_v(v \sec \alpha) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(2l)! Q_l(\sec \alpha)}{v^{2l+1}} + \theta_2 \frac{(2N)! Q_N(\sec \alpha)}{v^{2N+1}}.$$

Hierin ist für $h=1$ und $h=2$

$$|\theta_h| < 1, \text{ falls } -\frac{\pi}{4} \leq \arg(v \sec \alpha) \leq \frac{\pi}{4} \text{ ist,}$$

$$|\theta_h| < \frac{1}{\sin(2\mu_1 - 2 \arg(v \sec \alpha)) (\cos \mu_1)^{2N+2}}, \text{ falls } -\pi < \arg(v \sec \alpha) < -\frac{\pi}{4} \text{ ist,}$$

wo μ_1 den durch die Beziehung

$$(2N+4) \cos(3\mu_1 - 2 \arg(v \sec \alpha)) = 2N \cos(\mu_1 - 2 \arg(v \sec \alpha))$$

eindeutig bestimmten, im Falle $-\pi < \arg(v \sec a) \leq -\frac{3\pi}{4}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} + \arg(v \sec a)$, im Falle $-\frac{3\pi}{4} < \arg(v \sec a) \leq -\frac{\pi}{2}$ zwischen $\frac{\pi}{4} + \arg(v \sec a)$ und $\frac{\pi}{2} + \arg(v \sec a)$ und im Falle $-\frac{\pi}{2} < \arg(v \sec a) < -\frac{\pi}{4}$ zwischen $\frac{\pi}{4} + \arg(v \sec a)$ und 0 liegenden Winkel bezeichnet. Ausserdem ist für $h=1$ und $h=2$

$$|\theta_h| < \frac{1}{\sin(2\arg(v \sec a) - 2\mu_2)(\cos \mu_2)^{2N+2}}, \text{ falls } \frac{\pi}{4} < \arg(v \sec a) < \pi \text{ ist,}$$

wo μ_2 den durch die Beziehung

$$(2N+4) \cos(3\mu_2 - 2\arg(v \sec a)) = 2N \cos(\mu_2 - 2\arg(v \sec a))$$

eindeutig bestimmten, im Falle $\frac{3\pi}{4} \leq \arg(v \sec a) < \pi$ zwischen $\frac{\pi}{2} + \arg(v \sec a)$ und $\frac{\pi}{2}$, im Falle $\frac{\pi}{2} \leq \arg(v \sec a) < \frac{3\pi}{4}$ zwischen $-\frac{\pi}{2} + \arg(v \sec a)$ und $-\frac{\pi}{4} + \arg(v \sec a)$ und im Falle $\frac{\pi}{4} < \arg(v \sec a) < \frac{\pi}{2}$ zwischen 0 und $-\frac{\pi}{4} + \arg(v \sec a)$ liegenden Winkel bezeichnet. Schliesslich ist für $h=1$ und $h=2$

$$0 \leq \arg \theta_h \leq 2\arg(v \sec a), \text{ falls } 0 \leq \arg(v \sec a) < \frac{\pi}{2} \text{ ist,}$$

und

$$2\arg(v \sec a) \leq \arg \theta_h \leq 0, \text{ falls } -\frac{\pi}{2} < \arg(v \sec a) \leq 0 \text{ ist.}$$

Bemerkung. Es werden die Funktionen $A_\nu(w)$ und $B_\nu(w)$ für jedes $w \neq 0$ und jedes μ im Intervall $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$ durch die Integraldarstellungen

$$A_\nu(w) = \int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{-w \sinh z} \cosh \nu z \, dz, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$B_\nu(w) = \int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{-w \sinh z} \sinh \nu z \, dz \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

definiert. Sie besitzen für grosse Werte von $|w|$ mit $-\pi < \arg w < \pi$ die asymptotischen Entwicklungen ¹⁾

$$A_\nu(w) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{w^{2l+1}} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h+1)^2), \quad \dots \quad (7)$$

$$B_\nu(w) \sim \nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{w^{2l+2}} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h+2)^2). \quad \dots \quad (8)$$

Wegen

$$\cosh \nu z = \frac{1}{2} (e^{\nu z} + e^{-\nu z}) \quad , \quad \sinh \nu z = \frac{1}{2} (e^{\nu z} - e^{-\nu z})$$

folgt aus (5), (6) und (1)

$$A_\nu(w) = \frac{1}{2} (T_\nu(w) + T_{-\nu}(w)),$$

$$B_\nu(w) = \frac{1}{2} (T_\nu(w) - T_{-\nu}(w)).$$

Setzt man hierin $w = \nu \sec a = -\nu \sec(\pi - a)$ ($0 < a < \pi$, $a \neq \frac{\pi}{2}$), dann erhält man

$$A_\nu(\nu \sec a) = \frac{1}{2} (T_\nu(\nu \sec a) + T_{-\nu}(-\nu \sec(\pi - a))), \quad \dots \quad (9)$$

$$B_\nu(\nu \sec a) = \frac{1}{2} (T_\nu(\nu \sec a) - T_{-\nu}(-\nu \sec(\pi - a))). \quad \dots \quad (10)$$

Ist $\nu \neq 0$, $0 < a < \pi$, $a \neq \frac{\pi}{2}$ und $-\pi < \arg(\nu \sec a) < \pi$, dann kann man also aus unsrem Satze mittels (9) und (10) asymptotische Entwicklungen für $A_\nu(\nu \sec a)$ und $B_\nu(\nu \sec a)$ herleiten.

§ 1. Der LAGRANGESche Satz.

Den folgenden Hilfssatz entnehme ich Abh. B:

Hilfssatz 1. (LAGRANGEScher Satz mit Restglied).

Voraussetzungen:

1. G ist ein Gebiet, dessen Rand C aus endlich vielen geschlossenen rektifizierbaren Kurven besteht.

2. $\psi(z)$ ist stetig auf und innerhalb C und analytisch im Innern von C .

3. Die Funktion $\zeta = F(z)$ ist analytisch innerhalb C und bildet das Innere von C umkehrbar eindeutig ab auf ein Gebiet der ζ -Ebene.

4. a ist ein Punkt im Innern von C und $F(a) = 0$.

5. Falls z ein beliebiger Punkt innerhalb C ist, so ist $\frac{1}{\overline{F(t)} - F(z)}$ für alle Punkte t auf und innerhalb C , $t = z$ ausgenommen, eine stetige Funktion von t .

¹⁾ Für die Restglieder, die entstehen, wenn man die Entwicklungen (7) und (8) abbricht, habe ich in meiner Arbeit: „Asymptotische Entwicklungen von BESSELSchen, HANKELSchen und verwandten Funktionen“ (These Proceedings, Vol. 35 (1932), S. 656—667, S. 852—866, S. 948—958 und S. 1079—1090, siehe insbesondere S. 661—663) numerische obere Schranken bestimmt.

Unter diesen Voraussetzungen gilt für jeden Punkt z im Innern von C und für jedes ganze rationale $n \geq 0$

$$\psi(z) \frac{dz}{d\zeta} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \zeta^k + \frac{\zeta^n}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(t) dt}{F(t)^n (F(t) - \zeta)}.$$

worin

$$m_k = \frac{1}{k!} D_{z=a}^k \left\{ \psi(z) \left(\frac{z-a}{F(z)} \right)^{k+1} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(t) dt}{F(t)^{k+1}}.$$

§ 2. Entwicklung von $T'_v(w)$.

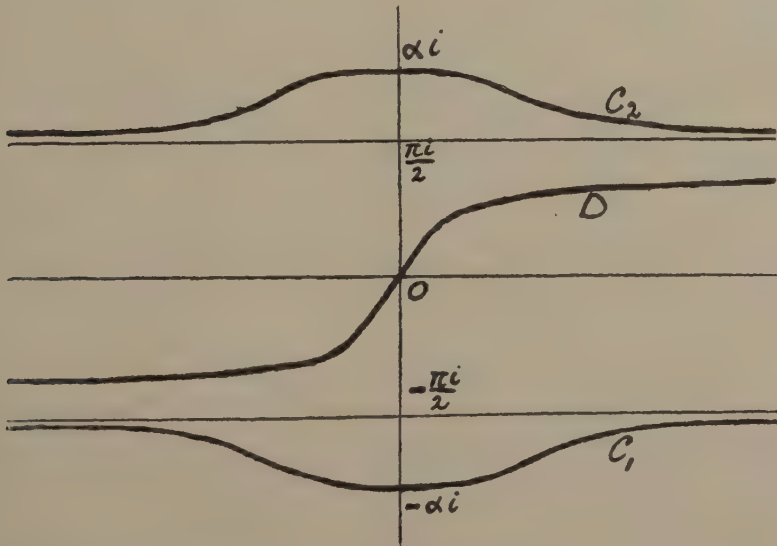
Ich betrachte zunächst die Funktion

$$\xi = V(z) = i(z \cos \alpha - \sinh z) \quad \left(0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2} \right). \quad (11)$$

Die Punkte $\pm \alpha i \pm 2h\pi i$ ($h=0, 1, 2, \dots$) sind die Sattelpunkte¹⁾ von $V(z)$. Die Gleichung der Kurve $\Im V(z) = 0$ ist, wenn man $z = x + iy$ setzt,

$$x \cos \alpha - \sinh x \cos y = 0. \quad (12)$$

Diese Kurve besteht aus der imaginären Achse und unendlich vielen gleichförmigen Zweigen, gehend durch die Punkte $\pm \alpha i \pm 2h\pi i$ ($h=0, 1, 2, \dots$). Die Geraden $y = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2h\pi$ sind die Asymptoten dieser Zweige. In der Figur sind gezeichnet die Zweige C_1 und C_2 , die durch $-\alpha i$ bez. αi gehen.



¹⁾ Ein Punkt z_0 heisst Sattelpunkt von $f(z)$, falls $f'(z_0) = 0$ ist.

Ich betrachte weiter nur den Streifen der z -Ebene zwischen C_1 und C_2 (einschliesslich C_1 und C_2).

Man hat

$$\left. \begin{aligned} V(ai) &= -a \cos a + \sin a > 0, \quad V(-ai) = a \cos a - \sin a < 0, \\ V(0) &= 0, \quad V\left(\pm \infty + \frac{\pi i}{2}\right) = \infty, \quad V\left(\pm \infty - \frac{\pi i}{2}\right) = -\infty. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ist $f(z)$ eine analytische Funktion von z , dann ändert sich bekanntlich $\Re f(z)$ monoton auf den Teilen der Kurve $\Im f(z) = 0$, die keinen Sattelpunkt von $f(z)$ enthalten. Aus (13) folgt also, dass $\Re V(z) < 0$ ist auf C_1 und auf der imaginären Achse zwischen 0 und $-ai$ und dass $\Re V(z) > 0$ ist auf C_2 und auf der imaginären Achse zwischen 0 und ai . Der Punkt $z=0$ ist die einzige Nullstelle von $V(z)$ im betrachteten Streifen; denn ist $V(z)=0$, so ist $\Im V(z) = \Re V(z) = 0$, also $z=0$.

Ich werde nun untersuchen, wie die Funktion $\xi = V(z)$ den Streifen der z -Ebene zwischen C_1 und C_2 auf die ξ -Ebene abbildet. Ich betrachte dazu für $0 \equiv \tau < \pi$ die Kurven $\arg V(z) = \tau$ und $\arg V(z) = \tau - \pi$. Die Gleichung dieser Kurven ist

$$\Im V(z) \cos \tau - \Re V(z) \sin \tau = 0,$$

also wegen (11)

$$(x \cos a - \sinh x \cos y) \cos \tau - (-y \cos a + \cosh x \sin y) \sin \tau = 0. \quad (14)$$

Für $\tau=0$ ist das die Kurve (12), sodass dann der im betrachteten Streifen liegende Teil der Kurve (14) aus C_1 , C_2 und der imaginären Achse zwischen $-ai$ und ai besteht.

Ich untersuche jetzt den Fall, dass $0 < \tau < \pi$ ist. Die Kurve (14) geht durch $z=0$ und ist symmetrisch in Bezug auf diesen Punkt. Die Tangente in $z=0$ bildet einen Winkel gleich $\tau - \frac{\pi}{2}$ mit der positiven x -Achse. Da $\Re V(z) = -y \cos a + \cosh x \sin y$ auf der imaginären Achse negativ für $-a \leq y < 0$ und positiv für $0 < y \leq a$ ist, so schneidet die Gerade $x=0$ die Kurve (14) zwischen C_1 und C_2 nur im Punkte $z=0$. Es sei $d > 0$ und es mögen $(d, -b)$ ($0 < b < \pi$) und (d, b) die Schnittpunkte der Gerade $x=d$ mit C_1 bez. C_2 bezeichnen. Setzt man die linke Seite von (14) gleich $g(x, y)$, dann ist

$$g'_y(d, y) = \sinh d \sin y \cos \tau + (\cos a - \cosh d \cos y) \sin \tau. \quad (15)$$

Da $\Im V(z) = x \cos a - \sinh x \cos y$ verschwindet, falls z auf C_1 oder auf C_2 liegt, und $\Re V(z) = -y \cos a + \cosh x \sin y$ negativ für jedes z auf C_1 und positiv für jedes z auf C_2 ist, hat man wegen (14)

$$\left. \begin{aligned} g(d, -b) &= (-b \cos a + \cosh d \sin b) \sin \tau > 0, \\ g(d, b) &= (b \cos a - \cosh d \sin b) \sin \tau < 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Ich werde nun beweisen, dass $g(d, y)$ (mit $0 < \tau < \pi$) eine und nur eine Nullstelle im Intervall $-b < y < b$ besitzt.

Ich unterscheide hierbei zwei Fälle:

1. Es sei $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Aus (15) folgt ¹⁾, dass $g'_y(d, y)$ höchstens zwei Nullstellen im Intervall $-b < y < 2\pi - b$ besitzt; die Gleichung $g(d, y) = 0$ hat daher in diesem Intervall höchstens drei Wurzeln. Wegen (14) ist $g(d, 2\pi - b) = g(d, -b) + 2\pi \cos a \sin \tau$, somit wegen (16)

$$g(d, 2\pi - b) > 0.$$

Hieraus und aus (16) ergibt sich also, dass die Gleichung $g(d, y) = 0$ zwei Wurzeln im Intervall $-b < y < 2\pi - b$ besitzt, von denen die eine im Intervall $b < y < 2\pi - b$, die andre im Intervall $-b < y < b$ liegt.

2. Es sei $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Hierbei unterscheide ich wiederum zwei Fälle:

2*. Es sei ausserdem $0 < \tau \leq \frac{\pi}{2}$. Da $\Im V(z)$ verschwindet für z auf C_1 , hat man

$$d \cos a - \sinh d \cos b = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Die Funktion $d \cos a - \sinh d \cos y$ ist monoton steigend im Intervall $0 < y < b$. Wegen (17) hat man also $d \cos a - \sinh d \cos y < 0$ für $0 < y < b$. Weiter ist $-y \cos a + \cosh d \sin y > 0$ für $0 < y < b$ (wegen $\cos a < 0$). Aus (14) folgt nun, dass $g(d, y) < 0$ ist im Intervall $0 < y < b$.

Aus (17) ergibt sich

$$\cos a - \cosh d \cos b = \cos a \left(1 - \frac{d}{\tanh d} \right)$$

und dieser Ausdruck ist, wegen $d > \tanh d$, positiv. Aus (15) geht also hervor, dass $g'_y(d, y)$ positiv für $y = b$ und negativ für $y = 0$ ist, sodass $g'_y(d, y)$ im Intervall $0 < y < b$ eine Nullstelle hat; $g'_y(d, y)$ besitzt daher noch höchstens eine Nullstelle im Intervall $-b < y \leq 0$. Die Gleichung $g(d, y) = 0$ hat also höchstens zwei Wurzeln im Intervall $-b < y \leq 0$. Hieraus ergibt sich, wegen $g(d, y) < 0$ für $0 < y < b$, dass die Gleichung $g(d, y) = 0$ höchstens zwei Wurzeln im Intervall $-b < y < b$ besitzt. Aus (16) folgt jetzt, dass $g(d, y)$ nur eine Nullstelle im Intervall $-b < y < b$ hat.

2**. Es sei ausserdem $\frac{\pi}{2} < \tau < \pi$. Der Beweis dieses Falles ist dem Beweis des Falles 2* analog.

Die Gerade $x = d$ schneidet also die Kurve (14) (mit $0 < \tau < \pi$) zwischen C_1 und C_2 nur in einem Punkt, sodass der zwischen C_1 und C_2 liegende Teil der Kurve (14), falls $0 < \tau < \pi$ ist, aus einem Zweig besteht (D in der Figur), der C_1 und C_2 weder schneidet noch berührt.

¹⁾ Die Funktion $\chi(y) = K_1 \cos y + K_2 \sin y + K_3$ hat, falls K_1 , K_2 und K_3 reell sind, höchstens zwei Nullstellen im Intervall $-b < y < 2\pi - b$.

Aus (14) ergibt sich, dass y bei unbeschränkt wachsendem x nach einem Grenzwert η strebt mit $\cos(\eta - \tau) = 0$. Also sind die Punkte $\infty + i\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)$ und (wegen der Symmetrie in Bezug auf $z = 0$) $-\infty - i\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)$ die im Unendlichen liegenden Punkte des obenge-meinten Zweiges. Da die Tangente der Kurve (14) in $z = 0$ einen Winkel von $\tau - \frac{\pi}{2}$ mit der positiven x -Achse bildet, ist wegen (11) $\arg V(z) = \tau - \pi$ auf dem Teil der Kurve (14), der die Punkte 0 und $\infty + i\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)$ verbindet, und $\arg V(z) = \tau$ auf dem Teil, der die Punkte 0 und $-\infty - i\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)$ verbindet.

Da auf der Kurve (14) $\Im(V(z)e^{-i\tau}) = 0$ ist, so ändert sich $V(z)e^{-i\tau}$ monoton¹⁾ von ∞ nach $-\infty$, wenn z diese Kurve von $-\infty - i\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)$ nach $\infty + i\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)$ durchläuft. Sind z_1 und z_2 zwei verschiedene Punkte der Kurve (14), dann ist also $V(z_1) \neq V(z_2)$. Sind z_3 und z_4 zwei verschiedene Punkte, liegend auf zwei Kurven (14), die verschiedenen Werten von τ mit $0 \leq \tau < \pi$ entsprechen, dann ist, da $z = 0$ die einzige zwischen C_1 und C_2 liegende Nullstelle von $V(z)$ ist, $V(z_3) \neq V(z_4)$.

$V(z)$ läuft (siehe (13)) monoton von $\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$ nach $-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha$, wenn z die imaginäre Achse von $-ai$ nach ai durchläuft; für z auf C_1 bez. C_2 ist $V(z) \leq \alpha \cos \alpha - \sin \alpha$ bez. $V(z) \geq -\alpha \cos \alpha + \sin \alpha$.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, dass die Funktion $\xi = V(z)$ den Streifen der z -Ebene zwischen C_1 und C_2 (C_1 und C_2 nicht eingeschlossen) umkehrbar eindeutig abbildet auf die ξ -Ebene, die von $\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$ nach $-\infty$ und ausserdem von $-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha$ nach ∞ geradlinig aufgeschnitten ist.

Aus (1) folgt²⁾

$$T'_v(w) = - \int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{vz - w \sinh z} \sinh z \, dz \quad \left(w \neq 0, -\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2} \right). \quad (18)$$

Wir werden nun die beiden folgenden Fälle betrachten:

1. $v \neq 0, -\pi < \arg v < \pi, \arg w = \arg v, \frac{w}{v} > 1$;
2. $v \neq 0, -\pi < \arg(-v) < \pi, \arg w = \arg(-v), \frac{w}{-v} > 1$.

¹⁾ Die Kurve (14) enthält, falls $0 < \tau < \pi$ ist, keinen Sattelpunkt von $V(z)$.

²⁾ Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist erlaubt; man vergleiche: WHITTAKER and WATSON, Modern Analysis, fourth edition, § 4.44.

Es existiert also ein eindeutig bestimmter Winkel α ($0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) mit der Eigenschaft $w = v \sec \alpha$. Wegen (18) erhalten wir nun

$$\frac{1}{v} \frac{dT_v(v \sec \alpha)}{d \sec \alpha} = - \int_0^{\infty - i(\arg(v \sec \alpha) - \mu)} e^{vz - v \sec \alpha \sinh z} \sinh z \, dz \quad (19)$$

Wir nehmen hierin μ derart, dass

$$\text{Max} \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \arg(v \sec \alpha) \right) < \mu < \text{Min} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arg(v \sec \alpha) \right) \quad (20)$$

ist, und setzen in (14) $\tau = \frac{\pi}{2} - \arg(v \sec \alpha) + \mu$, sodass wegen (20) $0 < \tau < \pi$ ist. Als Integrationsweg in (19) nehmen wir den Teil der Kurve (14) (mit $\tau = \frac{\pi}{2} - \arg(v \sec \alpha) + \mu$), der die Punkte 0 und $\infty - i(\arg(v \sec \alpha) - \mu)$ verbindet. Wir werden diesen Integrationsweg L nennen. L liegt also zwischen C_1 und C_2 und für jeden Punkt $z \neq 0$ von L ist

$$\arg V(z) = \tau - \pi = -\frac{\pi}{2} - \arg(v \sec \alpha) + \mu.$$

Wird jetzt (man vergleiche (11))

$$\zeta = \Phi(z) = -vz + v \sec \alpha \sinh z = i v V(z) \sec \alpha \quad (21)$$

gesetzt, dann ist also $\arg \zeta = \mu$ für jeden Punkt $z \neq 0$ von L , und, da $V(z) e^{-i\tau} = V(z) e^{-i(\frac{\pi}{2} - \arg(v \sec \alpha) + \mu)}$ sich auf L monoton von 0 nach $-\infty$ ändert, läuft $\zeta e^{-i\mu}$ monoton von 0 nach ∞ , wenn z die Kurve L von 0 nach $\infty - i(\arg(v \sec \alpha) - \mu)$ durchläuft. Aus (19) und (21) folgt daher

$$\frac{1}{v} \frac{dT_v(v \sec \alpha)}{d \sec \alpha} = - \int_L e^{vz - v \sec \alpha \sinh z} \sinh z \, dz = - \int_0^{\infty e^{i\mu}} e^{-\zeta} \sinh z \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \quad (22)$$

Wir betrachten jetzt die Kurve C bestehend aus C_1 , C_2 und den Geraden $x = k_1$ und $x = -k_2$, worin k_1 und k_2 unbeschränkt wachsen ($x = k_1$ verbindet $\infty - \frac{\pi i}{2}$ mit $\infty + \frac{\pi i}{2}$; $x = -k_2$ verbindet $-\infty - \frac{\pi i}{2}$ mit $-\infty + \frac{\pi i}{2}$). Aus (21) und der oben untersuchten Abbildung der

z -Ebene auf die ξ -Ebene mittels $\xi = V(z)$ folgt, dass die Funktion $\zeta = \Phi(z)$ das Gebiet der z -Ebene innerhalb C umkehrbar eindeutig abbildet auf die ζ -Ebene, die von $-i v \sec \alpha (\sin \alpha - a \cos \alpha)$ nach

$\infty e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \arg(\nu \sec \alpha)\right)}$ und ausserdem von $i \nu \sec \alpha (\sin \alpha - a \cos \alpha)$ nach $\infty e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\nu \sec \alpha)\right)}$ geradlinig aufgeschnitten vorausgesetzt wird. Für z auf C_1 bez. C_2 hat man

$$e^{-i\left(-\frac{\pi}{2} + \arg(\nu \sec \alpha)\right)} \phi(z) \equiv |\nu \sec \alpha| (\sin \alpha - a \cos \alpha)$$

bez.

$$e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\nu \sec \alpha)\right)} \phi(z) \equiv |\nu \sec \alpha| (\sin \alpha - a \cos \alpha).$$

Wir wenden jetzt den LAGRANGESchen Satz mit $\psi(z) = \sinh z$, $F(z) = \phi(z)$ und $a=0$ an und finden dann für jedes z im Innern von C und jedes ganze $n \geq 0$

$$\sinh z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \int_C \frac{\sinh t dt}{\phi(t)^{k+1}} + \frac{\zeta^n}{2\pi i} \int_C \frac{\sinh t dt}{\phi(t)^n (\phi(t) - \zeta)}. \quad (23)$$

Da $\phi(t)$ eine ungerade Funktion von t ist, so enthält die Entwicklung von $\phi(t)^{-k-1} \sinh t$ nach steigenden Potenzen von t , falls k gerade ist, nur gerade Potenzen von t ; man hat daher wegen des Residuensatzes, falls k gerade ist,

$$\int_C \frac{\sinh t dt}{\phi(t)^{k+1}} = \int_{(0+)} \frac{\sinh t dt}{\phi(t)^{k+1}} = 0.$$

Wir erhalten also, wenn wir in (23) $n = 2N + 1$ setzen,

$$\sinh z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta^{2l+1} \int_C \frac{\sinh t dt}{\phi(t)^{2l+2}} + \frac{\zeta^{2N+1}}{2\pi i} \int_C \frac{\sinh t dt}{\phi(t)^{2N+1} (\phi(t) - \zeta)}.$$

Setzen wir diese Entwicklung in (22) ein, dann können wir den folgenden Hilfssatz aussprechen:

Hilfssatz 2. Ist $\nu \neq 0$, $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \arg(\nu \sec \alpha) < \pi$,
 $\text{Max} \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \arg(\nu \sec \alpha) \right) < \mu < \text{Min} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arg(\nu \sec \alpha) \right)$.

$\phi(z)$ die durch (21) definierte Funktion und C die oben definierte Kurve, dann ist für jedes ganze $N \geq 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{dT_\nu(\nu \sec \alpha)}{d \sec \alpha} &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} \int_0^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{2l+1} d\zeta \int_C \frac{\sinh t dt}{\phi(t)^{2l+2}} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{2N+1} d\zeta \int_C \frac{\sinh t dt}{\phi(t)^{2N+1} (\phi(t) - \zeta)}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Mathematics. — *Quasimetrik auf totalisotropen Flächen.* (Erste Mitteilung). Von M. PINL. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of October 29, 1932.)

In der Theorie der totalisotropen (ametrischen) Flächen — begründet und gefördert von Herrn LENSE ¹⁾ — standen bislang Existenz- und Einbettungsprobleme im Vordergrund. Gleichwohl ergeben sich bereits in der Theorie der isotropen Kurven, wo der VESSIOT-STUDY'sche "natürliche Parameter" mehrfach als "Quasilänge" auf der Kurve interpretiert wird, Möglichkeiten einer Begriffsbildung "auf der Kurve" ²⁾. Damit ist unter Verwendung höherer Ableitungen des Kurvenvektors ein Ersatz für die identisch verschwindende quadratische Metrik dieser Kurven gewonnen — ein Verfahren, das sich auch auf mehrfach isotrope Kurven (etwa im euklidischen n -dimensionalen Raum R_n) ausdehnen lässt ³⁾. Dasselbe Ziel setzt sich Verfasser im folgenden für den "binären" Fall zweidimensionaler Flächen mit identisch verschwindender quadratischer Metrik d. h. für die ametrischen Flächen von LENSE ⁴⁾. Auf ihnen ist der Versuch, die quadratische Metrik zu ersetzen, von vornherein nahe liegend, während den Flächen mit nur identisch verschwindender Diskriminante der (nicht identisch verschwindenden) quadratischen metrischen Fundamentalform (z. B. den isotropen Torsen im R_3) noch eine Art lineare Metrik zukommt ⁵⁾.

§ 1. Die biquadratische Fundamentalform.

Bedeutet x eine analytische Vektorfunktion zweier komplexer Parameter u_1, u_2 und werden partielle Ableitungen durch angehängte Indizes ($\alpha, \beta, \gamma, \dots, i, k, l, \dots$, über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren!)

¹⁾ J. LENSE, I. Ueber ametrische Mannigfaltigkeiten u. quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante, Dtsch. Math. Ver. 35 (1926) S. 280—294; II. Ueber spezielle ametrische Mannigfaltigkeiten, Wien. Ber. 135 (1926) S. 29—32; III. Ein Beitrag zur Kugelgeometrie, Wien. Ber. 136 (1927) S. 81—85; IV. Ueber die Tangentialräume ametrischer Mannigfaltigkeiten, Math. Ztsch. 29 (1928) S. 87—95; V. Ueber die Ableitungsgleichungen der ametrischen Mannigfaltigkeiten, Math. Ztschr. 34 (1932) S. 721—726.

²⁾ E. STUDY, Minimalkurven u. SERRET'sche Flächen, Americ. Journ. 32 (1910) S. 273.

³⁾ M. PINL. Ueber Kurven mit isotropen Schmiegräumen im euklidischen Raum von n Dimensionen, Monatshefte f. Math. u. Phys. XXXIX, (1932) S. 157—172.

⁴⁾ Die Begriffe "totalisotrop" und "ametrisch" werden in dieser wie in der geplanten folgenden Mitteilung völlig synonym gebraucht.

⁵⁾ C. L. E. MOORE, Minimal varieties of two and three dimensions whose element of arc is a perfect square, Journ. of Math. Massachusetts 4 (1925) p. 167—178.

zum Ausdruck gebracht, so ist eine totalisotrope Fläche V_2 im (komplexen) euklidischen R_n ($n \geq 5$) vermöge:

$$\chi = \chi(u_1, u_2) \quad , \quad \chi_\alpha \chi_\beta \equiv g_{\alpha\beta} \equiv 0 \quad \{u_1, u_2\} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1)$$

gegeben, woraus man unmittelbar noch folgende Relationen erhält:¹⁾

$$\chi_\alpha \chi_{\beta\gamma} \equiv 0 \quad , \quad \chi_{\alpha\delta} \chi_{\beta\gamma} - \chi_{\alpha\gamma} \chi_{\beta\delta} \equiv 0 \quad \{u_1, u_2\} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (2)$$

Führt man durch eine regulär-analytische Transformation:

$$u_\alpha = u_\alpha(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \quad , \quad \left| \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_i} \right| \neq 0 \quad \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\} \quad \alpha, i = 1, 2 \quad (3)$$

neue Parameter \bar{u}_1, \bar{u}_2 ein und drückt die neuen Ableitungen $\bar{\chi}_i, \bar{\chi}_{ik}$ durch die alten aus, so entsteht:

$$\bar{\chi}_i = \chi_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_i} \quad , \quad \bar{\chi}_{ik} = \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_i} \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_k} + \chi_\alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \bar{u}_i \partial \bar{u}_k} \quad , \quad \alpha, \beta, i, k = 1, 2 \quad (4)$$

Nach Voraussetzung ist χ totalisotrop. Also gilt (1) und (2) und daher für die skalaren Produkte:

$$\bar{\chi}_{ik} \bar{\chi}_{lm} = \chi_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_i} \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_k} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \bar{u}_l} \frac{\partial u_\delta}{\partial \bar{u}_m} \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (5)$$

Dies sind die Transformationsformeln eines vierfach kovarianten Tensors:

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta} = \chi_{\alpha\beta} \chi_{\gamma\delta} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (6)$$

Er ist — gemäss der Beziehungen (2) — vollständig symmetrisch im Index-quadrupel $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und bestimmt die "Quasimetrik" der Fläche durch die biquadratische Differentialform:

$$-dp^4 = g_{\alpha\beta\gamma\delta} du^\alpha du^\beta du^\gamma du^\delta \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (7)$$

derart, dass für eine (analytische) Kurve auf V_2 :

$$\eta(t) = \chi[u_1(t), u_2(t)] \quad , \quad \dot{\eta}^2 \equiv 0 \quad , \quad \ddot{\eta}^2 \equiv 0 \quad \{t\} \quad , \quad \left(\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt} \quad , \quad \ddot{\eta} = \frac{d^2\eta}{dt^2} \right) \quad (8)$$

durch die Integralinvariante:

$$p(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{-g_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta} dt \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (9)$$

¹⁾ Vgl. II S. 30, IV S. 89, V. S. 728.

ein Mass der "Quasibogenlänge" auf V_2 gegeben ist¹⁾. Für die "erste Normale"²⁾ $\ddot{\eta}$ der Kurve η ergibt sich aus (8) (9) (1) die Beziehung:

$$\ddot{\eta}^2 = - \left(\frac{dp}{dt} \right)^4 = g_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (10)$$

Ihr Betrag verschwindet demnach nur für zweifach isotrope Richtungen auf V_2 identisch, welche sich aus der biquadratischen Gleichung:

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta} du^\alpha du^\beta du^\gamma du^\delta = 0 \text{ bzw. } f = g_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (11)$$

für das Richtungsverhältnis $\frac{du_1}{du_2} (\dot{u}_1 : \dot{u}_2)$ bestimmen. Man wird also in diesem Zusammenhang zunächst auf die (algebraische) Theorie der binären biquadratischen Form geführt³⁾.

§ 2. Differential- und Integralinvarianten nullter Ordnung.

Wird die binäre biquadratische Form f nach Potenzen der \dot{u}_1, \dot{u}_2 geordnet, so entsteht:

$$f \equiv a_0 \dot{u}_1^4 + 4a_1 \dot{u}_1^3 \dot{u}_2 + 6a_2 \dot{u}_1^2 \dot{u}_2^2 + 4a_3 \dot{u}_1 \dot{u}_2^3 + a_4 \dot{u}_2^4; \quad (12)$$

$$a_0 \equiv g_{1111}, a_1 \equiv g_{1112}, a_2 \equiv g_{1122}, a_3 \equiv g_{1222}, a_4 \equiv g_{2222}$$

Von ihrem Komitantensystem sind hier von Wichtigkeit:

(a) die Invariante: $\Theta_1 = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)$ vom Gewicht "4".

$$(b) \quad \quad \quad : \Theta_2 = 6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad \text{vom Gewicht "6".}$$

(c) die Diskriminante: $\Theta_3 = \Theta_2^2 - \frac{1}{8} \Theta_1^3$ vom Gewicht "12".

(d) die Kovariante: $H = \frac{1}{72} |f_{ik}|$; $f_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{u}_i \partial \dot{u}_k}$, $i, k = 1, 2$.

Die Invarianten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ geben unmittelbar Anlass zur Bildung der Integralinvarianten:

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= \iint \sqrt[4]{\Theta_1} du_1 du_2, \quad O_2 = \iint \sqrt[6]{\Theta_2} du_1 du_2, \\ O_3 &= \iint \sqrt[12]{\Theta_3} du_1 du_2, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

von welchen in Analogie zur gewöhnlichen (regulären) Flächentheorie O_3 als "Quasioberfläche" bezeichnet werden kann. Für die "Nullrich-

¹⁾ Vgl. (2) S. 273.

²⁾ Vgl. (3) S. 164.

³⁾ Vgl. z.B. R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie § 11 S. 54. Groningen 1923.

tungen" von (11) d. h. für das Netz der zweifach isotropen Kurven auf V_2 ergeben sich folgende Fallunterscheidungen ¹⁾.

- (I) $\Theta_1 \equiv 0, \Theta_2 \equiv 0, \Theta_3 \equiv 0, H \equiv 0; f \neq 0$ eine Nullrichtung (vierfach zählend)!
- (II) $\Theta_1 \neq 0, \Theta_2 \neq 0, \Theta_3 \equiv 0, \Theta_1 H - \Theta_2 f \equiv 0$ zwei Nullrichtungen (jede doppelt zählend)!
- (III) $\Theta_1 \equiv 0, \Theta_2 \equiv 0, \Theta_3 \equiv 0,$ zwei Nullrichtungen (eine dreifach zählend)!
- (IV) $\Theta_1 \neq 0, \Theta_2 \neq 0, \Theta_3 \equiv 0,$ drei Nullrichtungen (eine doppelt zählend)!
- (V) $\Theta_1 \neq 0, \Theta_2 \equiv 0, \Theta_3 \neq 0,$ "harmonischer" Fall!
- (VI) $\Theta_1 \equiv 0, \Theta_2 \neq 0, \Theta_3 \neq 0,$ "aequianharmonischer" Fall!
- (VII) alle Komitanten $\equiv 0,$ "allgemeiner" Fall!

Von vorstehender Einteilung erfasst der euklidische R_5 nur den Fall (I)!

Beweis: die totalisotropen Flächen des R_5 sind mit den ametrischen Torsen identisch ²⁾. Also gilt die Darstellung:

$$\xi = \eta(u_1) + u_2 \eta_1(u_1), \quad \eta_1^2 \equiv \eta_{11}^2 \equiv 0, \quad \eta_{111}^2 \neq 0 \quad \{u_1\}. \quad (14)$$

und nach (6) und (12) ist ersichtlich:

$$\left. \begin{aligned} f &\equiv a_0 \dot{u}^4, \quad a_0 \equiv u_2^2 \eta_{111}^2 \neq 0, \\ a_1 &\equiv a_2 \equiv a_3 \equiv a_4, \quad \Theta_1 \equiv \Theta_2 \equiv \Theta_3 \equiv H \equiv 0 \end{aligned} \right\} \{u_1, u_2\}. \quad (15)$$

Durch jeden Punkt einer ametrischen Torse des R_5 geht somit im allgemeinen eine einzige zweifach isotrope Kurve, die geradlinige Erzeugende (Analogie zu den isotropen Torsen des R_3 !).

Der euklidische R_6 erfasst die Fälle (I), (III) und (V)!

Beweis: den Fällen (I), (III), (V) ist das identische Verschwinden der Invarianten Θ_2 gemeinsam; ist $v \neq 0$ ein beliebiger (konstanter) Vektor im R_6 , so verschwindet vermöge (1) (2) das Determinantenquadrat:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}, v)^2 \equiv 0 \quad \{v\} \quad \dots \quad (16)$$

identisch in v . Also besteht die lineare Relation:

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_{11} \xi_{11} + \alpha_{12} \xi_{12} + \alpha_{22} \xi_{22} + \beta v \equiv 0 \quad \{u_1, u_2, v\}. \quad (17)$$

¹⁾ Von dem Fall identisch verschwindender $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ wird hier abgesehen (zweifach totalisotrope Mannigfaltigkeiten!); allgemein wird die "Quasigeometrie" einer k -fach totalisotropen Mannigfaltigkeit von einem $2(k+1)$ -fach kovarianten Fundamentaltensor beherrscht ($k=0, 1, 2, 3, \dots$).

²⁾ Vgl. (I) II, IV, V.

Skalare Multiplikation mit ξ_x ergibt wegen (1), (2) und der Willkür der Wahl von v das Verschwinden von β ; somit reduziert sich (17) auf:

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_{11} \xi_{11} + a_{12} \xi_{12} + a_{22} \xi_2 \equiv 0 \quad \{u_1 u_2\}, \dots \quad (18)$$

woraus durch skalare Multiplikation mit $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}$ zufolge (2) und (12):

$$\left. \begin{aligned} a_{11} a_0 + a_{12} a_1 + a_{22} a_2 &\equiv 0 \\ a_{11} a_1 + a_{12} a_2 + a_{22} a_3 &\equiv 0 \\ a_{11} a_2 + a_{12} a_3 + a_{22} a_4 &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad \{u_1 u_2\} \dots \dots \dots (19)$$

entsteht. Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren ξ_1, ξ_2 schliesst die Lösung $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ aus. Somit gilt notwendig auf ξ :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \right| \equiv 0 \quad \text{d.h. } \Theta_2 \equiv 0 \quad \{u_1 u_2\} \dots \dots \dots (20)$$

Fall (I) ist im R_6 trivial (Existenz ametrischer Torsen!); Fall (III) belegen die geradlinigen totalisotropen Flächen:

$$\xi = \eta(u_1) + u_2 \beta(u_1), \quad a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv 0, \quad \Theta_1 \equiv \Theta_2 \equiv \Theta_3 \equiv 0, \quad H \equiv 0, \quad f \equiv 0. \quad (21)$$

Ein Beispiel dieser Art hat im Zusammenhang mit dem Integrationsproblem der MONGE'schen Gleichung $\sum_{v=1}^5 dx_v^2 = 0$ Herr LENSE angegeben:¹⁾

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{u^3}{12} - v \frac{1}{u^2}, & x_3 &= \frac{u}{2} + v \frac{1}{2}, & x_5 &= \frac{u^2}{4} - v \frac{1}{u}, \\ x_2 &= -\frac{i u^3}{12} + v \frac{i}{u^2}, & x_4 &= -\frac{i u}{2} + v \frac{i}{2}, & x_6 &= -\frac{i u^2}{4} - v \frac{i}{u}, \end{aligned} \right\} i = \sqrt{-1}.$$

Fall (V) belegen die (normierten) ametrischen Schiebflächen:²⁾

$$\xi = \eta(u_1) + \beta(u_2), \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &\equiv -1, \quad a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv 0, \quad a_4 \equiv -1 \quad \{u_1 u_2\} \\ \Theta_1 &\equiv 2, \quad \Theta_2 \equiv 0, \quad \Theta_3 \equiv -\frac{1}{2}, \\ H &\equiv 144 \dot{u}_1^2 \dot{u}_2^2, \quad f \equiv -(\dot{u}_1^4 + \dot{u}_2^4). \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Durch jeden Punkt einer totalisotropen Fläche des R_6 gehen somit im allgemeinen vier zweifach isotrope Kurven; sie bilden auf der Fläche ein harmonisches Netz.

Auch die totalisotropen Flächen des R_6 sind nach dem Vorhergehenden noch nicht die allgemeinsten ihrer Art, da ihr (zweiter) Schmiegraum³⁾

¹⁾ Vgl. V S. 725—726.

²⁾ Vgl. (1) II.

³⁾ DUSCHEK—MAYER, Lehrb. der Differentialgeometrie, Bd. II § 1 (IX), S. 201—203. Leipzig 1930.

wegen der linearen Abhängigkeit (18) der aufspannenden Vektoren höchstens vierdimensional ist. Den Fällen (II), (IV), (VI), (VII) ist das nicht-identische Verschwinden der Invarianten Θ_2 gemeinsam. Die Schmiegräume der Repräsentanten dieser Fälle sind mithin notwendig fünfdimensional und daher vom R_7 an aufwärts zu erwarten. Die Integralmannigfaltigkeiten höchster Dimension der MONGE'schen Gleichung:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2 + dx_6^2 + dx_7^2 = 0 \quad . \quad (23)$$

sind durch dreidimensionale ametrische Torsen gegeben ¹⁾. Die auf ihnen liegenden zweidimensionalen Flächen gehören nicht in die Fallunterscheidungen (II), (IV), (VI), (VII). Die Frage, ob totalisotrope Flächen dieser Art bereits im R_7 auftreten, muss daher durch die Integration von (23) mit Funktionen zweier Parameter entschieden werden. In jüngster Zeit ist Herrn LENSE auch die Integration der Gleichung (23) mit Hilfe zweiparametriger Funktionen gelungen, doch erscheint es dem beschränkten Rahmen dieser Ausführungen unangemessen, diese bereits erheblich verwickelten Resultate im Sinne der vorliegenden Problemstellung an dieser Stelle durchzudiskutieren ²⁾. In bequemer Weise erhält man die gesuchten Beispiele mit Hilfe dreidimensionaler totalisotroper Translationsmannigfaltigkeiten des R_9 ³⁾:

$$\begin{aligned} x_1^2 &\equiv \eta_2^2 & \delta_3^2 &\equiv x_1 \eta_2 \equiv x_1 \delta_3 \equiv \eta_2 \delta_3 \equiv 0 \\ t(u_1, u_2, u_3) &= x(u_1) + \eta(u_2) + \delta(u_3), & \{u_1, u_2, u_3\}. & (24) \\ x_{11}^2 &\equiv \eta_{22}^2 \equiv \delta_{33}^2 \equiv -1 \end{aligned}$$

Die Invarianten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ der zweidimensionalen auf (24) gelegenen Flächen des "Diagonalsystems":

$$\alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \quad (\alpha_i \text{ Konstante}) \quad . \quad . \quad (25)$$

sind konstant! Man erhält z. B. mit der Annahme: $\alpha_3 \neq 0, u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma$ für:

$$w(u_1, u_2) = t(u_1, u_2, \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma) = x(u_1) + \eta(u_2) + \delta(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma) \quad (26)$$

die Werte:

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + \alpha \delta_3, & w_2 &= \eta_2 + \beta \delta_3, & w_{11} &= x_{11} + \alpha^2 \delta_{33}, & w_{12} &= \alpha \beta \delta_{33}, & w_{22} &= \eta_{22} + \beta^2 \delta_{33} \\ a_0 &= -(1 + \alpha^4), & a_1 &= -\alpha^3 \beta, & a_2 &= -\alpha^2 \beta^2, & a_3 &= -\alpha \beta^3, & a_4 &= -(1 + \beta^4) \end{aligned} \quad (27)$$

und somit die konstanten Invarianten:

$$\Theta_1 = 2(1 + \alpha^4 + \beta^4) \quad , \quad \Theta_2 = -6\alpha^2 \beta^2 \quad , \quad \Theta_3 = \Theta_2^2 - \frac{1}{6} \Theta_1^3 \quad . \quad (28)$$

¹⁾ Vgl. (I) I, IV, V.

²⁾ Die gleiche Methode führt nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn LENSE auch im allgemeinen Fall $\sum_{v=1}^n dx_v^2 = 0$ zum Ziel.

³⁾ Die drei Kurven x, η, δ liegen notwendig gänzlich in je einem von drei totalorthogonalen R_3 , vgl. auch II S. 31.

Durch eine längere hier übergangene Rechnung ergibt sich ferner:

$$\left. \begin{aligned} H &= 2[\alpha^2 \beta^2 \dot{u}_1 + 2\alpha \beta^3 \ddot{u}_1 \dot{u}_2 + \\ &\quad + (1 + \alpha^4 + \beta^4) \dot{u}_1^2 \ddot{u}_2 + 2\alpha^3 \beta \dot{u}_1 \ddot{u}_2 + \alpha^2 \beta^2 \dot{u}_2^2] \\ \Theta_1 H - \Theta_2 f &= (4\alpha^2 \beta^6 - 2\alpha^6 \beta^2 - 2\alpha^2 \beta^2) \dot{u}_1^4 + \\ &\quad + 8\alpha \beta^3 - 16\alpha^5 \beta^3 + 8\alpha \beta^7) \dot{u}_1^3 \dot{u}_2 + \\ &\quad + [4(1 + \alpha^4 + \beta^4)^2 - 36\alpha^4 \beta^4] \dot{u}_1^2 \dot{u}_2^2 \\ &\quad + (8\alpha^3 \beta - 16\alpha^3 \beta^5 + 8\alpha^7 \beta) \dot{u}_1 \dot{u}_2^3 + \\ &\quad + (4\alpha^6 \beta^2 - 2\alpha^2 \beta^6 - 2\alpha^2 \beta^2) \dot{u}_2^4. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Nun erhält man durch Wahl biquadratischer Einheitswurzeln für α, β unmittelbar Beispiele für (II):

$$\alpha^4 = \beta^4 = 1, \quad \Theta_1 = 6 \neq 0, \quad \Theta_2 = \pm 6 \neq 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_1 H - \Theta_2 f \equiv 0 \quad (30)$$

Die Wahl konjugiert-komplexer kubischer Einheitswurzeln ergibt:

$$\alpha^4 = \alpha, \quad \beta^4 = \beta, \quad \Theta_1 = 2(1 + \alpha + \beta) = 0, \quad \Theta_2 \neq 0, \quad \Theta_3 \neq 0. \quad (31)$$

also Beispiele für den "aequianharmonischen" Fall (VI). Schliesslich bietet die Koeffizientenwahl:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\pm i}{3\sqrt{3}}}, \quad \alpha^4 + \beta^4 = 0, \quad \Theta_1 = 2 \neq 0, \quad \Theta_2 = \frac{\pm 2}{\sqrt{3}} \neq 0, \quad \Theta_3 = 0 \quad (32)$$

ein einfaches Beispiel für (IV). Der (zweite) Schmiegraum aller dieser Flächen ist notwendig fünfdimensional. Da die Konstruktion von Beispielen für den allgemeinsten Fall (VII) nach (28) und (29) keinerlei Schwierigkeiten bietet, ist allgemein gezeigt: *im euklidischen Raum von n Dimensionen, R_n , existieren für hinreichend grosse Werte von n (spätestens für $n=9$) Vertreter sämtlicher Typen ametrischer Flächen, welche nach der algebraischen Klassifizierung ihrer biquadratischen Metrik zu erwarten sind.*

Mit vorstehender Untersuchung ist ein Rahmen für vielfältige Einzeluntersuchungen gegeben, ohne dass dabei Ableitungen der Fundamentalkomponenten $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ verwendet wurden — (auf nullter Differentiationsstufe!). Es mag hierzu noch bemerkt werden, dass man zur Behandlung hierher gehöriger Fragen auch die umfassendere Gruppe der konformen Punkttransformationen des R_n heranziehen kann. Die hier getroffene Typeneinteilung bleibt dabei unberührt; insbesondere bewirkt die Inversion:

$$x^* = \frac{x}{x^2}, \quad \text{die Transformation: } g_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{g_{\alpha\beta\gamma\delta}}{(x^2)^2}.$$

In einer weiteren Mitteilung an dieser Stelle soll eine Anwendung der FINSLER-BERWALD'schen Theorie auf totalisotrope Flächen versucht werden.

Sie führt zu einer "Quasikrümmungstheorie" totalisotroper Flächen unter Zugrundelegung eines ausgezeichneten Bahnkurvenfeldes:

$$\delta p = \delta \int_{t_0}^t \sqrt{-g_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta} dt = 0. \quad \dots \quad (33)$$

d.h. der Extremalen des (ersten) Variationsproblems der "Quasibogenlänge"! ¹⁾

¹⁾ Es sei mir an dieser Stelle gestattet, den Herren Professoren R. WEITZENBÖCK u. J. LENSE meinen ergebensten Dank für das dieser Arbeit erwiesene förderliche Interesse auszusprechen.

Mathematics. — *Ueber die Nullstellen einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen.* Von STEFAN BERGMANN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of November 26, 1932).

1. Zu den interessanten Problemen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen gehören die folgenden Fragen:

I. Sei \mathfrak{B} ein schlichtes, zusammenhängendes Gebiet im $z_1 z_2$ -Raume. Sei ferner $\psi_k(z_1, z_2)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, eine unendliche Folge von in \mathfrak{B} quadratintegrierbaren ¹⁾ Funktionen. Existiert dann eine in \mathfrak{B} analytische Funktion $f(z_1, z_2)$, die in \mathfrak{B} durch alle $\psi_k(z_1, z_2)$ teilbar ist, d.h. von der Eigenschaft, dass $\frac{f(z_1, z_2)}{\psi_k(z_1, z_2)}$ für jedes k in \mathfrak{B} regulär bleibt?

Falls die Funktion $\psi_k(z_1, z_2)$ in \mathfrak{B} irgendwo verschwindet, bezeichnen wir sie als die Nullfunktion von $f(z_1, z_2)$ im Bereiche \mathfrak{B} und denjenigen Teil der analytischen Fläche $\psi_k(z_1, z_2) = 0$, der in \mathfrak{B} liegt, als Nullfläche von $f(z_1, z_2)$ in \mathfrak{B} ²⁾.

II. Sei $P_k(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})$, $k = 1, 2, 3, \dots$, eine abzählbar unendliche Punktfolge, die in \mathfrak{B} liegt und sich nirgends im Innern von \mathfrak{B} häuft. Gibt es eine nicht identisch verschwindende, in \mathfrak{B} reguläre Funktion $f(z_1, z_2)$, die in den Punkten P_k verschwindet?

¹⁾ Die im folgenden durchgeführten Betrachtungen lassen sich ohne wesentliche Veränderungen bei jeder Klasse von Funktionen, die im "weiteren Sinne in \mathfrak{B} quadratintegrierbar" sind, durchführen. Andererseits lässt sich zeigen, dass jede abzählbare Folge von in \mathfrak{B} regulären Funktionen, die gewissen natürlichen Bedingungen genügen, zu einer Klasse von "im weiteren Sinne quadratintegrierbaren" Funktionen gehört. Näheres darüber soll an einer anderen Stelle berichtet werden.

²⁾ Wenn im Folgenden über Nullfunktionen oder Nullflächen gesprochen wird, so verstehen wir stets Nullfunktionen bezw. Nullflächen in \mathfrak{B} .

2. Bevor wir zur Aufstellung gewisser hinreichender Bedingungen für das Bestehen von I bzw. II übergehen, erinnern wir an einige früher bewiesenen Sätze.

In einer Reihe von Arbeiten¹⁾ wurde eine spezielle Klasse²⁾ von in \mathfrak{B} analytischen Funktionen betrachtet, nämlich die Gesamtheit derjenigen Funktionen $h(z_1, z_2)$, für die

$$(h, h) = \int_{\mathfrak{B}} |h(z_1, z_2)|^2 d\omega \leq 1, \quad (d\omega = \text{vierdimensionales Volumenelement}) \quad (1)$$

gilt. Man zeigt nun leicht, dass zu jedem (festen) Punkte (t_1, t_2) von \mathfrak{B} eine Funktion $W(z_1, z_2; t_1, t_2)$ existiert (mit $(W, W) = 1$), sodass für jedes $h(z_1, z_2)$, das (1) erfüllt,

$$|h(t_1, t_2)| \leq |W(t_1, t_2; t_1, t_2)| \quad (2)$$

gilt.

Durch $K_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2) = |W(t_1, t_2; t_1, t_2)|^2$ wird somit in jedem Punkte (t_1, t_2) eine reelle Funktion definiert, die man als Kernfunktion von \mathfrak{B} bezeichnet. Für die Kernfunktion gilt die Ungleichung

$$K_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2) \leq \frac{2}{\pi^2 [A(t_1, t_2)]^4} \quad (3)$$

wobei $A(t_1, t_2)$ den Abstand des Punktes (t_1, t_2) vom Rande bedeutet³⁾. Schliesslich setzen wir

$$M_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2) = \frac{W(z_1, z_2; t_1, t_2)}{\sqrt{K_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2)}} \quad (4)$$

Für $M_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ gilt nun:

$$M_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2; t_1, t_2) = 1 \quad (5)$$

$$\int_{\mathfrak{B}} |M_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)|^2 d\omega_z = \frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2)} \quad (6)$$

1) Vgl. dazu die Arbeiten: a. "Ueber unendliche HERMITESche Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf die Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen." Math. Zeitschr. 29 (1929) S. 641, insbesondere § 1.

b. "Ueber die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande I." Journ. f. reine u. angewandte Math. 169 (1933) S. 1 § 1.

Die hier betrachtete Kernfunktion ist gleichzeitig der Kern des im Bereiche vollständigen Systemes von Orthogonalfunktionen.

2) Es sei bemerkt, dass die Gesamtheit dieser Funktionen keine "Klasse von Funktionen" im Sinne einer kürzlich von Herren H. CARTAN und THULLEN aufgestellten Definition bildet. Vgl. dazu Math. Ann. 106 (1932) S. 627.

3) Vgl. dazu die Arbeit a. Formel (15).

integrierbaren Funktionen, von denen jede irgendwo in \mathfrak{B} verschwindet. Existiert ein positives p , sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A(\psi_k)]^{\frac{p}{2}} \dots \dots \dots (12)$$

konvergiert, so gibt es eine in \mathfrak{B} reguläre Funktion $f(z_1, z_2)$, die die $\psi_k(z_1, z_2)$ und nur die $\psi_k(z_1, z_2)$ zu Nullfunktionen in \mathfrak{B} hat.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir p ganz annehmen, denn konvergiert die Reihe (12) für irgendein p , so konvergiert sie für jedes grösseres p . Man kann ferner offenbar eine Folge von $\varepsilon_k > 0$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$) so finden, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A(\psi_k) + \varepsilon_k]^{\frac{p}{2}} \dots \dots \dots (13)$$

konvergiert, und zu jedem $A_k = A(\psi_k) + \varepsilon_k$ eine Funktion $v_k(z_1, z_2)$ der Klasse N so bestimmen, dass

$$\int_{\mathfrak{B}} |1 - v_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2)|^2 d\omega = A_k \dots \dots \dots (14)$$

wird. Wir ordnen die A_k , sodass sie eine nicht zunehmende Folge bilden, setzen zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 - v_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2)}{\sqrt{A_k}} &= \varphi_k(z_1, z_2) \\ \text{d.h. } v_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2) &= 1 - \varphi_k(z_1, z_2) \sqrt{A_k} \end{aligned} \right\} \dots \dots (15)$$

und bilden den Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \prod_{k=1}^{\infty} [v_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2) e^{B_k(z_1, z_2)}], \\ B_k(z_1, z_2) &= \sum_{n=1}^{n=p-1} \frac{1}{n} [1 - v_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2)]^n, \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

von dem wir zeigen werden, dass er die gewünschten Eigenschaften hat.

Da $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$ ist, kann man zu jeder festen Zahl c ein endliches m finden, sodass für $k \geq m$

$$A_k < \frac{1}{c} \dots \dots \dots (17)$$

gilt. Da alle $\varphi_k(z_1, z_2)$ normiert sind d.h.

$$\int_{\mathfrak{B}} |\varphi_k(z_1, z_2)|^2 d\omega = \int_{\mathfrak{B}} \left| \frac{1 - v_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2)}{\sqrt{A_k}} \right|^2 d\omega = 1 \dots (18)$$

ist, gilt nach (2) und (7) [für alle k] in \mathfrak{H}_c die Ungleichung

$$|\varphi_k(z_1, z_2)|^2 < c, \quad \dots \quad (19)$$

und keine der Funktionen

$$\nu_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2) = 1 - \varphi_k(z_1, z_2) \sqrt{A_k}, \quad (k \equiv m),$$

wird in \mathfrak{H}_c verschwinden.

Wir werden nun zeigen, dass für

$$f_m(z_1, z_2) = \prod_{k=m}^{\infty} [\nu_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2) e^{B_k(z_1, z_2)}] \quad \dots \quad (20)$$

in \mathfrak{H}_c die Ungleichung

$$0 < |f_m(z_1, z_2)| < \infty, \quad \dots \quad (21)$$

gilt, woraus man dann die Existenz und das identische Nichtverschwinden von $f(z_1, z_2)$ erschliesst.¹⁾

Um (21) zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass (bei passender Wahl von $\log [\nu_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2) e^{B_k(z_1, z_2)}]$) die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} \log [\nu_k(z_1, z_2) \psi_k(z_1, z_2) e^{B_k(z_1, z_2)}] \quad \dots \quad (22)$$

in \mathfrak{H}_c gleichmässig konvergiert.²⁾

(22) kann man auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=m}^{\infty} \left\{ \log [1 - \varphi_k(z_1, z_2) \sqrt{A_k}] + \sum_{n=1}^{n=p-1} \frac{1}{n} [\varphi_k(z_1, z_2) \sqrt{A_k}]^n \right\} = \\ = \sum_{k=m}^{\infty} \left\{ - \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n} [\varphi_k(z_1, z_2) \sqrt{A_k}]^n \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (23)$$

schreiben. Nach dem WEIERSTRASSschen Doppelreihensatz genügt es weiter zu zeigen, dass eine von z_1, z_2 unabhängige konvergente Majorantenreihe $\sum_{k=m}^{\infty} M_k$ existiert, sodass

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left| \frac{1}{n} [\varphi_k(z_1, z_2) \sqrt{A_k}]^n \right| \leq M_k \quad \dots \quad (24)$$

¹⁾ Vgl. dazu z.B. OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. I (1907) S. 457 und 461, (III, 11, § 6 und § 7).

²⁾ Wegen der Zulässigkeit der Limesvertauschung bei gleichmässig konvergenter Reihe vgl. z.B. OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. II (1924) S. 13, (I, § 8).

ist. Nach (17) bzw. (19) ist der links in (24) stehende Ausdruck kleiner als

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n} \left| c^{1/2} A_k^{1/2} \right|^n &\leq \frac{1}{p} \left| \sqrt{c A_k} \right|^p \frac{1}{1 - \left| \sqrt{c A_k} \right|} \leq \\ &\leq \frac{c^{\frac{p}{2}}}{p} \frac{1}{1 - \left| \sqrt{c A_m} \right|} A_k^{\frac{p}{2}} = M_k \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Nach der Voraussetzung bzw. (13) konvergiert also die Majorantenreihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} M_k = \frac{c^{\frac{p}{2}}}{p} \frac{1}{1 - \left| \sqrt{c A_m} \right|} \sum_{k=m}^{\infty} A_k^{\frac{p}{2}}, \quad \dots \quad (26)$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

6. Eine Anwendung dieses Satzes ergibt eine hinreichende Bedingung für das Problem II.

Korollar. Ist $P_k(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})$ eine abzählbare Folge von Punkten und existiert eine positive Zahl p , sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[K_{\mathfrak{B}}(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})]^{\frac{p}{2}}} \quad \dots \quad (27)$$

konvergiert, so gibt es eine in \mathfrak{B} reguläre (von identisch Null verschiedene) Funktion $f(z_1, z_2)$, die in den Punkten P_k verschwindet.

Beweis: Wir setzen

$$\psi_k(z_1, z_2) = 1 - M_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; z_1^{(k)}, z_2^{(k)}), \quad \dots \quad (28)$$

wo $M_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ die in (4) eingeführte Funktion bedeutet. Nach (5) gilt jetzt

$$\psi_k(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}) = 0. \quad \dots \quad (29)$$

Aus (6) folgt nach der SCHWARZschen Ungleichung, dass die $\psi_k(z_1, z_2)$ quadratintegrierbar sind. Da ferner $\nu(z_1, z_2) = 1$ eine zulässige Konkurrenzfunktion der Klasse N ist, gilt nach (6)

$$A(\psi_k) \leq \frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})} \quad \dots \quad (30)$$

und aus der Konvergenz von (27) folgt die Konvergenz der in diesem Falle gebildeten Reihe (12). Da somit alle Voraussetzungen des Satzes

auf S. 1190 erfüllt sind, können wir die oben angegebene Funktion $f(z_1, z_2)$ konstruieren und nach (29) wird sie in den Punkten $(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})$ verschwinden.

Bemerkung. Die auf die angegebene Weise konstruierte Funktion $f(z_1, z_2)$ hat nun die Eigenschaft, dass zu jedem Punkte P_k eine andere Funktion $\psi_k(z_1, z_2)$ gehört. Dementsprechend wird $\frac{f(z_1, z_2)}{\psi_m(z_1, z_2)}$ in allen von P_m verschiedenen Punkten P_k verschwinden.

7. Aus dem Korollar folgt nun, dass jeder Bereich \mathfrak{S} , der die Eigenschaft hat, dass für jeden seiner Randpunkte (ζ_1, ζ_2)

$$\lim_{(z_1, z_2) \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2)} K_{\mathfrak{S}}(z_1, z_2) = \infty$$

gilt, ein Existenzbereich ist, d.h. dass man eine in \mathfrak{S} reguläre Funktion $f(z_1, z_2)$ konstruieren kann, für die der Rand von \mathfrak{S} eine natürliche Grenze ist. Wir brauchen nur die Folge der Punkte P_k (vgl. das Korollar) so zu wählen, dass sie sich gegen jeden Randpunkt häufen und so nahe an dem Rande liegen, dass die Reihe (27) konvergiert.